Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Zusammenfassung.

Ein physikalischer Prozeß (die Änderung eines physikalischen Systems) heißt stochastisch-definit, wenn aus der Kenntnis des Zustandes X_0 des Systems in einem gewissen Zeitmoment t_0 die Kenntnis der Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Zustände X des Systems in einem Zeitmoment $t > t_0$ folgt.

Der Verfasser betrachtet systematisch die einfachsten Fälle der stochastisch-definiten Prozesse und in erster Linie solche, die nach der Zeit stetig sind (darin besteht die wesentliche Neuheit der Methode: Bis jetzt betrachtete man gewöhnlich einen stochastischen Prozeß als eine Reihe von diskreten „Ereignissen").

Wenn die Menge $\mathfrak{A}$ der möglichen verschiedenen Zustände des Systems endlich ist, so läßt sich der stochastisch-definite Prozeß durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen charakterisieren (Kap. II). Wenn der Zustand des Systems durch einen oder mehrere stetige Parameter definiert ist, so wird der analytische Apparat durch parabolische partielle Differentialgleichungen gegeben (Kap. IV). Man kommt dabei zu verschiedenen Verteilungsfunktionen, unter denen die Laplacesche Normalverteilung als natürlicher einfachster Fall erscheint.

Einleitung.

I.

Wenn man Natur- oder Sozialereignisse mathematisch behandeln will, muß man zuerst diese Ereignisse *schematisieren*; man kann nämlich die mathematische Analysis zur Betrachtung eines Änderungsprozesses eines Systems nur dann anwenden, wenn man voraussetzt, daß jeder mögliche Zustand dieses Systems sich mit Hilfe eines bestimmten mathematischen Apparats vollständig beschreiben läßt, z. B. durch die Werte einer bestimmten Anzahl von Parametern; ein solches mathematisch-definier-

bares System ist überhaupt nicht die Wirklichkeit selbst, sondern nur *ein Schema*, welches zur Beschreibung der Wirklichkeit dienen kann.

Die klassische Mechanik gebraucht nur solche Schemata, in welchen der Zustand y des Systems in einem Zeitmoment t durch den Zustand x in einem beliebigen vorigen Moment t_0 eindeutig definiert ist; der mathematische Ausdruck dieser Tatsache ist durch die Formel

$$y = f(x, t_0, t)$$

gegeben. Wenn eine solche eindeutige Funktion f existiert, wie es immer in der klassischen Mechanik vorausgesetzt wird, so sagen wir, daß unser Schema *ein Schema eines wohldeterminierten Prozesses* ist. Man könnte überdies noch solche Prozesse als wohldeterminierte hinzulassen, in welchen der Zustand y durch den Zustand x in einem einzigen Zeitmoment t nicht vollständig definiert ist, sondern von der Art der Änderung des Zustandes x vor dem Augenblick t wesentlich abhängt. Aber man zieht gewöhnlich vor, diese Abhängigkeit von der Vorgeschichte des Systems dadurch zu vermeiden, daß man den Begriff des Zustandes des Systems im Zeitmoment t erweitert und dementsprechend neue Parameter einführt[1]).

Außerhalb des Gebietes der klassischen Mechanik betrachtet man oft neben den Schemata der wohldeterminierten Prozesse solche Schemata, in welchen der Zustand x des Systems in einem Zeitmoment t_0 nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit für den jeweils möglichen Zustand y in einem folgenden Moment $t > t_0$ definiert. Wenn bei beliebig gegebenen t_0, $t > t_0$ und x eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion für die Zustände y existiert, so sagen wir, daß unser Schema *ein Schema eines stochastisch-definiten Prozesses ist.* Im allgemeinen Falle wird diese Verteilungsfunktion in der Form

$$P(t_0, x, t, \mathfrak{E})$$

gegeben, wobei $\mathfrak{E}$ eine Menge von Zuständen y ist und P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, einen Zustand y aus dieser Menge im Moment t zu erhalten. Dabei erhebt sich eine Schwierigkeit, welche darin besteht, daß es allgemein unmöglich ist, diese Wahrscheinlichkeit für alle Mengen $\mathfrak{E}$ zu definieren. Eine strenge Definition des stochastisch-definiten Prozesses, welche diese Schwierigkeit vermeidet, ist im § 1 gegeben.

Man könnte auch hier, wie im Falle der wohldeterminierten Prozesse noch solche Schemata betrachten, in welchen die Wahrscheinlichkeit P von der ganzen Vorgeschichte des Systems und nicht nur von dem Zustande x

---

[1]) Ein wohlbekanntes Beispiel für diese Methode wird dadurch gegeben, daß man in der Beschreibung des Zustandes eines mechanischen Systems nicht nur die Koordinaten seiner Punkte, sondern auch die Komponenten ihrer Geschwindigkeiten einführt.

wesentlich abhängt. Man kann aber diesen Einfluß der Vorgeschichte mit Hilfe derselben Methoden vermeiden wie im Falle der wohldeterminierten Schemata.

Es sei noch bemerkt, daß die Möglichkeit bei der Behandlung irgendeines reellen Prozesses die Schemata der wohldeterminierten oder nur stochastisch-definiten Prozesse anzuwenden, in keinem Zusammenhang mit der Frage steht, ob dieser wirkliche Prozeß selbst determiniert oder zufällig sei.

II.

Man untersucht gewöhnlich in der Wahrscheinlichkeitstheorie nur solche Schemata, in welchen die Änderungen des Systems nur in den Zeitmomenten einer diskreten Folge $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ stattfinden. Bachelier[2]) war unseres Wissens der erste, welcher systematisch Schemata untersuchte, in denen die Wahrscheinlichkeiten $P(t_0, x, t, \mathfrak{E})$ mit der Zeit t sich stetig ändern. Auf die Fälle, welche von Bachelier untersucht wurden, werden wir im § 16 und in der Schlußbemerkung zurückkommen. Es sei hier nur noch erwähnt, daß die Bachelierschen Betrachtungen jeder mathematischen Strenge gänzlich entbehren.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir vom zweiten Kapitel an hauptsächlich die oben erwähnten nach der Zeit stetigen Schemata. Mathematisch hat man dabei den großen Vorteil, daß man für P Differentialgleichungen nach der Zeit einführen kann und dann die einfachen analytischen Formeln erhält, welche in der gewöhnlichen Theorie nur als asymptotische Formeln auftreten. Was die Anwendungen betrifft, so kann man erstens die neuen Schemata unmittelbar auf die realen Prozesse anwenden, zweitens aus den Lösungen der Differentialgleichungen der nach der Zeit stetigen Prozesse neue asymptotische Formeln für diskrete Schemata ableiten, wie es im § 12 gezeigt wird.

III.

Wir gehen nicht von einem vollständigen Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie aus, geben aber schon jetzt alle Voraussetzungen an, welche weiter gebraucht werden. Über die Menge $\mathfrak{A}$ von möglichen Zuständen x machen wir keine speziellen Voraussetzungen: mathematisch kann man $\mathfrak{A}$ als eine beliebige Menge von beliebigen Elementen betrachten. Alle Voraussetzungen über das Mengensystem $\mathfrak{F}$ und die Funktion $P(t_0, x, t, \mathfrak{E})$ sind in § 1 gegeben. Weiter entwickelt sich die ganze Theorie als eine reinmathematische.

---

[2]) I. Théorie de la spéculation. Ann. de l'École norm. 17 (1900), p. 21.
II. Les probabilités à plusieurs variables, ibid. 27 (1910), p. 339.
III. Calcul des probabilités 1912.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen.

§ 1.

Allgemeines Schema des stochastisch-definiten Prozesses.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein System, welches sich in den Zuständen $x, y, z, \cdots$ befinden kann, und $\mathfrak{F}$ ein System der Mengen $\mathfrak{E}$ der Zustände $x, y, z, \cdots$;

wir sagen, daß *der Prozeß der Veränderung des Systems* $\mathfrak{S}$ *stochastisch-definit in bezug auf* $\mathfrak{F}$ *ist*, wenn bei beliebiger Wahl des Zustandes x, der Menge $\mathfrak{E}$ und der Zeitmomente t_1 und t_2 $(t_1 < t_2)$ die Wahrscheinlichkeit $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$, daß — unter der Hypothese des Zustandes x in dem Zeitmoment t_1 — einer der Zustände aus $\mathfrak{E}$ im Zeitmoment t_2 stattfindet, bestimmt ist. Wenn die Wahrscheinlichkeit $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ nur für $t_2 > t_1 \geqq t_0$ bestimmt ist, so sagen wir, daß der Prozeß der Veränderung für $t \geqq t_0$ stochastisch definit ist.

Was das System $\mathfrak{F}$ betrifft, so setzen wir voraus, daß es erstens additiv ist (d. h. alle Differenzen sowie die endlichen und abzählbaren Summen seiner Elemente enthält), zweitens die leere Menge, die Menge $\mathfrak{A}$ aller möglichen Zustände $x, y, z, \ldots$ und alle aus je einem Element bestehenden Mengen $\mathfrak{E}$ enthält. Wenn die Menge $\mathfrak{A}$ endlich oder abzählbar ist, so besteht offensichtlich $\mathfrak{F}$ aus allen Untermengen von $\mathfrak{A}$. Aber in dem wichtigsten Fall einer nicht abzählbaren Menge $\mathfrak{A}$ ist die Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ alle Untermengen von $\mathfrak{A}$ umfaßt, in keinem bis jetzt bekannten wohldefinierten Schema erfüllt.

Wir setzen natürlich voraus, daß

$$P(t_1, x, t_2, \mathfrak{A}) = 1 \tag{1}$$

und für die leere Menge $\mathfrak{N}$

$$P(t_1, x, t_2, \mathfrak{N}) = 0$$

ist. Ferner wird vorausgesetzt, daß $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ als Funktion der Menge $\mathfrak{E}$ additiv ist, d. h. für jede Zerlegung der Menge $\mathfrak{E}$ in endlich oder abzählbar vielen disjunkte Summanden $\mathfrak{E}_n$

$$\sum_n P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}_n) = P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) \tag{2}$$

gilt. Um weitere wichtigere Voraussetzungen über $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ zu formulieren, bedürfen wir des Begriffs der Meßbarkeit der Funktion $f(x)$ in bezug auf das System $\mathfrak{F}$ und der Definition des abstrakten Stieltjesschen Integrals. Wir wollen diese Begriffe in einer Form darstellen, welche unseren Zwecken angepaßt ist[3]).

Man nennt die Funktion $f(x)$ *meßbar, in bezug auf das System* $\mathfrak{F}$, wenn bei jeder Wahl der reellen Zahlen a und b die Menge $\mathfrak{E}$ $(a < f(x) < b)$ derjenigen x, für welche $f(x)$ der eingeklammerten Ungleichung genügt, zum System $\mathfrak{F}$ gehört. Man zeigt leicht, daß, wenn das System $\mathfrak{F}$ additiv und $f(x)$ in bezug auf $\mathfrak{F}$ meßbar ist, auch die Menge $\mathfrak{E}$ derjenigen x,

---

[3]) Über diese Begriffe sowie über die additiven Mengensysteme usw. siehe z. B.: M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. de la Soc. Math. de France **43** (1915), p. 248.

für welche $f(x)$ einer im Borelschen Sinne meßbaren Menge gehört, im System $\mathfrak{F}$ vorkommt.

Es sei nun $f(x)$ in bezug auf das System $\mathfrak{F}$ meßbar und beschränkt und $\varphi(\mathfrak{E})$ eine auf $\mathfrak{F}$ definierte, nicht-negative und additive Mengenfunktion; bekanntlich konvergiert sodann die Summe

$$\sum_m \frac{m}{n}\, \varphi\left(\frac{m}{n} \leqq f(x) < \frac{m+1}{n}\right)$$

mit $n \to \infty$ gegen einen festen Limes. Dieser Limes soll *das Integral*

$$\int_{\mathfrak{A}_x} f(x)\, \varphi(d\mathfrak{A})$$

genannt werden. Letztere Bezeichnung weicht von der allgemein gebräuchlichen nur dadurch ab, daß die Integrationsvariable speziell bezeichnet ist und das Differentialzeichen eingeklammert ist.

Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ als Funktion des Zustandes x in bezug auf das System $\mathfrak{F}$ meßbar ist. $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ soll endlich für beliebige t_1, t_2, t_3 $(t_1 < t_2 < t_3)$ *der fundamentalen Gleichung*

$$\boxed{P(t_1, x, t_3, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{A}_y} P(t_2, y, t_3, \mathfrak{E})\, P(t_1, x, t_2, d\mathfrak{A})} \tag{3}$$

genügen. Wenn die Menge $\mathfrak{A}$ aus endlich oder abzählbar vielen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ besteht, so ist

$$\int_{\mathfrak{A}_y} P(t_2, y, t_3, \mathfrak{E})\, P(t_1, x, t_2, d\mathfrak{A}) = \sum_n P(t_2, x_n, t_3, \mathfrak{E})\, P(t_1, x, t_2, x_n),$$

und rechts steht die volle Wahrscheinlichkeit $P(t_1, x, t_3, \mathfrak{E})$, damit ist in diesem Falle die Formel (3) bewiesen. Wenn aber $\mathfrak{A}$ unabzählbar ist, nehmen wir die Relation (3) als ein neues Axiom an.

Die bis jetzt ausgesprochenen Forderungen charakterisieren vollständig den Begriff des stochastisch-definiten Prozesses: die Elemente $x, y, z, \ldots$ einer beliebigen Menge $\mathfrak{A}$ können als Merkmale der Zustände eines Systems, und eine beliebige Funktion $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$, die den erwähnten Forderungen genügt, als die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion betrachtet werden.

Wir nennen die nicht-negative Funktion $F(\mathfrak{E})$, welche über das System $\mathfrak{F}$ definiert und additiv ist, und überdies der Gleichung

$$F(\mathfrak{A}) = 1 \tag{4}$$

genügt, *die normale Verteilnngsfunktion*. Alle Forderungen bezüglich $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ können wir jetzt folgendermaßen aussprechen: $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ *ist als Funktion von* $\mathfrak{E}$ *eine normale Verteilungsfunktion, als Funktion*

von x in bezug auf das System $\mathfrak{F}$ meßbar und genügt endlich der Integralgleichung (3).

Es sei nun für ein Zeitmoment $t = t_0$ eine normale Verteilungsfunktion $Q(t_0, \mathfrak{E})$ für die Wahrscheinlichkeit, daß das System $\mathfrak{S}$ sich im Moment t_0 im Zustande aus $\mathfrak{E}$ befindet. Um die Verteilungsfunktion $Q(t, \mathfrak{E})$ für die Zeitmomente $t > t_0$ zu definieren, bedienen wir uns *der zweiten Fundamentalgleichung*

$$(5) \qquad Q(t, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{A}_x} P(t_0, x, t, \mathfrak{E})\, Q(t_0, d\mathfrak{A}).$$

Man hat offenbar

$$(6) \qquad Q(t, \mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}} Q(t_0, d\mathfrak{A}) = Q(t_0, \mathfrak{A}) = 1,$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\int_{\mathfrak{A}_x} P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})\, Q(t_1, d\mathfrak{A}) \\ &= \int_{\mathfrak{A}_x} P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{A}'_y} P(t_0, y, t_1, d\mathfrak{A})\, Q(t_0, d\mathfrak{A}') \\ &= \int_{\mathfrak{A}'_y} \int_{\mathfrak{A}_x} P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})\, P(t_0, y, t_1, d\mathfrak{A})\, Q(t_0, d\mathfrak{A}') \\ &= \int_{\mathfrak{A}'_y} P(t_0, y, t_2, \mathfrak{E})\, Q(t_0, d\mathfrak{A}') = Q(t_2, \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Formel (5) als Definition von $Q(t, \mathfrak{E})$ und nicht als eine neue Forderung bezüglich des Systems $\mathfrak{S}$; es sei jedoch bemerkt, daß (5) die Relation (3) als Spezialfall enthält.

§ 2.

Der Operator $F_1(x, \mathfrak{E}) * F_2(x, \mathfrak{E})$.

Es seien $F_1(x, \mathfrak{E})$ und $F_2(x, \mathfrak{E})$ zwei normale Verteilungsfunktionen, welche als Funktionen von x in bezug auf das System $\mathfrak{F}$ meßbar sind. Wir setzen dann

$$(8) \qquad F(x, \mathfrak{E}) = F_1(x, \mathfrak{E}) * F_2(x, \mathfrak{E}) = F_1 * F_2(x, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{A}_y} F_2(y, \mathfrak{E})\, F_1(x, d\mathfrak{A});$$

wie leicht ersichtlich, genügt $F(x, \mathfrak{E})$ denselben Bedingungen über Meßbarkeit und Additivität wie $F_1(x, \mathfrak{E})$ und $F_2(x, \mathfrak{E})$; die Gleichung (4) ist ebenfalls erfüllt:

$$F(x, \mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}'_y} F_2(y, \mathfrak{A})\, F_1(x, d\mathfrak{A}') = \int_{\mathfrak{A}'_y} F_1(x, d\mathfrak{A}') = 1;$$

folglich ist auch $F(x, \mathfrak{E})$ eine normale Verteilungsfunktion.

Ferner genügt der Operator $F_1 * F_2$ *dem assoziativen Gesetze*

$$(9) \qquad F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3,$$

wie man aus der folgenden leichten Rechnung schließt:

$$F_1 * (F_2 * F_3)(x, \mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_y} \int\limits_{\mathfrak{A}'_z} F_3(z, \mathfrak{E}) F_2(y, d\mathfrak{A}') F_1(x, d\mathfrak{A})$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{A}'_z} F_3(z, \mathfrak{E}) \int\limits_{\mathfrak{A}_y} F_2(y, d\mathfrak{A}') F_1(x, d\mathfrak{A}) = (F_1 * F_2) * F_3(x, \mathfrak{E}).$$

Dagegen gilt das Kommutativgesetz für unseren Operator im allgemeinen nicht.

Wir wollen jetzt eine solche *Einheitsfunktion* $\mu(x, \mathfrak{E})$ definieren, welche für eine beliebige $F(x, \mathfrak{E})$ der Gleichung

$$\mu * F(x, \mathfrak{E}) = F * \mu(x, \mathfrak{E}) = F(x, \mathfrak{E}) \tag{10}$$

genügt.

Es ist zu diesem Zweck hinreichend, $\mu(x, \mathfrak{E}) = 1$, wenn $\mathfrak{E}$ den Zustand x enthält, und $\mu(x, \mathfrak{E}) = 0$ im entgegengesetzten Fall zu setzen; es ist dann in der Tat

$$\mu * F(x, \mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_y} F(y, \mathfrak{E}) \mu(x, d\mathfrak{A}) = F(x, \mathfrak{E}),$$

$$F * \mu(x, \mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_y} \mu(y, \mathfrak{E}) F(x, d\mathfrak{A}) = \int\limits_{\mathfrak{E}} F(x, d\mathfrak{E}) = F(x, \mathfrak{E}).$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ war bis jetzt nur für $t_2 > t_1$ definiert; wir setzen nun für jedes t

$$P(t, x, t, \mathfrak{E}) = \mu(x, \mathfrak{E}). \tag{11}$$

Diese neue Definition widerspricht wegen (10) der fundamentalen Gleichung (3) nicht, da man dieselbe in der Form

$$P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) * P(t_2, x, t_3, \mathfrak{E}) = P(t_1, x, t_3, \mathfrak{E}) \tag{12}$$

schreiben kann.

§ 3.

Klassifikation der Spezialfälle.

Wenn die Änderungen des Zustandes des Systems $\mathfrak{S}$ nur in den Zeitmomenten einer diskreten Folge

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots \to +\infty$$

stattfinden, so ist offenbar

$$P(t', x, t'', \mathfrak{E}) = P(t_m, x, t_n, \mathfrak{E}) \tag{13}$$

für alle Zeitmomente t' und t'', welche die Ungleichungen

$$t_m \leqq t' < t_{m+1}, \quad t_n \leqq t'' < t_{n+1}$$

erfüllen. Setzt man

(14) $$P(t_m, x, t_n, \mathfrak{E}) = P_{mn}(x, \mathfrak{E}),$$

(15) $$P_{n-1,n}(x, \mathfrak{E}) = P_n(x, \mathfrak{E}),$$

so ist

(16) $$P_{mn}(x, \mathfrak{E}) = P_{m+1} * P_{m+2} * \ldots * P_n(x, \mathfrak{E}).$$

Folglich ist in diesem Falle der Prozeß der Veränderung des Systems $\mathfrak{S}$ durch die elementaren Verteilungsfunktionen $P_n(x, \mathfrak{E})$ vollständig definiert.

Es seien $P_1(x, \mathfrak{E}), P_2(x, \mathfrak{E}), \ldots, P_n(x, \mathfrak{E}), \ldots$ willkürliche normale Verteilungsfunktionen, welche als Funktionen von x meßbar sind, und $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$ eine Folge der Zeitmomente; wenn man $P_{mn}(x, \mathfrak{E})$ und $P(t', x, t'', \mathfrak{E})$ durch (16), (14) und (13) definiert, so erhält man die ebenfalls normalen Verteilungsfunktionen, welche den Gleichungen

(17) $$P_{mn}(x, \mathfrak{E}) * P_{np}(x, \mathfrak{E}) = P_{mp}(x, \mathfrak{E}), \qquad m < n < p,$$

und folglich auch der Gleichung

$$P(t', x, t'', \mathfrak{E}) * P(t'', x, t''', \mathfrak{E}) = P(t', x, t''', \mathfrak{E}), \qquad t' < t'' < t''',$$

genügen; die letzte Gleichung ist aber nichts anderes als die Fundamentalgleichung (12) oder (3). So sieht man, daß willkürliche normale Verteilungsfunktionen $P_n(x, \mathfrak{E})$, wenn sie nur als Funktionen von x meßbar sind, einen stochastisch-definiten Prozeß charakterisieren.

Nur die oben definierten *Schemata mit diskreter Zeit* betrachtet man gewöhnlich in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wenn alle Verteilungsfunktionen $P_n(x, \mathfrak{E})$ identisch sind:

(18) $$P_n(x, \mathfrak{E}) = P(x, \mathfrak{E}),$$

so haben wir *ein homogenes Schema mit diskreter Zeit*; in diesem Falle erhält man wegen (16)

(19) $$P_{n,\,n+p}(x, \mathfrak{E}) = \underbrace{P(x, \mathfrak{E}) * P(x, \mathfrak{E}) * \ldots * P(x, \mathfrak{E})}_{p\text{-mal}}$$

$$= [P(x, \mathfrak{E})]_*^p = P^p(x, \mathfrak{E}).$$

Schon 1900 hat L. Bachelier die nach der Zeit kontinuierlichen stochastischen Prozesse betrachtet[4]), und es bestehen alle Gründe dafür, daß *die Schemata mit kontinuierlicher Zeit* eine zentrale Stellung in der Wahrscheinlichkeitstheorie erhalten sollen. Die wichtigsten sind hier *die nach der Zeit homogenen Schemata*, in welchem $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ nur von der Differenz $t_2 - t_1$ abhängt:

(20) $$P(t, x, t + \tau, \mathfrak{E}) = P(\tau, x, \mathfrak{E}).$$

[4]) Siehe [2]) I.

Die Fundamentalgleichung schreibt man in diesem Falle so:

$$P(\tau_1, x, \mathfrak{E}) * P(\tau_2, x, \mathfrak{E}) = P(\tau_1 + \tau_2, x, \mathfrak{E}). \tag{21}$$

Eine andere Reihe von Spezialfällen erhalten wir mit der Spezialisierung der Menge $\mathfrak{A}$ der elementaren Zustände x. Man unterscheidet hier die Fälle der endlichen oder abzählbaren Mengen $\mathfrak{A}$; im kontinuierlichen Falle wird nach der Zahl der den Zustand des Systems charakterisierenden Parameter unterschieden usw. Auf diesen Unterscheidungen beruht die Einteilung des weiteren Stoffes.

§ 4.

Das Ergodenprinzip.

Ohne Spezialisierung der Menge $\mathfrak{A}$ aller möglichen Zustände x können wir nur wenige allgemeine Sätze beweisen, nämlich die Sätze über das Ergodenprinzip. Man sagt, daß ein stochastisch-definiter Prozeß *dem Ergodenprinzip* gehorcht, wenn für beliebige $t^{(0)}$, x, y und $\mathfrak{E}$

$$\lim \left[P(t^{(0)}, x, t, \mathfrak{E}) - P(t^{(0)}, y, t, \mathfrak{E})\right] = 0, \quad t \to \infty, \tag{22a}$$

gilt. Für das Schema mit diskreter Zeit ist (22a) mit

$$\lim \left[P_{mn}(x, \mathfrak{E}) - P_{mn}(y, \mathfrak{E})\right] = 0, \quad n \to \infty, \tag{22b}$$

offensichtlich äquivalent; in diesem Falle gilt der folgende

Satz I. *Wenn für beliebige x, y und $\mathfrak{E}$*

$$P_n(x, \mathfrak{E}) \geqq \lambda_n P_n(y, \mathfrak{E}), \quad \lambda_n \geqq 0, \tag{23}$$

ist und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

divergiert, so ist das Ergodenprinzip (22b) *erfüllt und die Konvergenz von* (22b) *gleichmäßig in x, y, $\mathfrak{E}$.*

Beweis. Es sei

$$\sup \left[P_{kn}(x, \mathfrak{E})\right] = M_{kn}(\mathfrak{E}),$$

$$\inf \left[P_{kn}(x, \mathfrak{E})\right] = m_{kn}(\mathfrak{E}).$$

Man hat offenbar für $i < k$

$$P_{in}(x, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{A}_y} P_{kn}(y, \mathfrak{E})\, P_{ik}(x, d\mathfrak{A}) \leqq M_{kn}(\mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{A}_y} P_{ik}(x\, d\mathfrak{A}) = M_{kn}(\mathfrak{E}) \tag{25}$$

und in analoger Weise

$$P_{in}(x, \mathfrak{E}) \geqq m_{kn}(\mathfrak{E}). \tag{26}$$

Für beliebige x und y hat man wegen (23)

$$P_k(x, \mathfrak{E}) - \lambda_k P_k(y, \mathfrak{E}) \geqq 0,$$

$$P_{k-1,n}(x, \mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_z} P_{kn}(z, \mathfrak{E}) P_k(x, d\mathfrak{A})$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{A}_z} P_{kn}(z, \mathfrak{E}) [P_k(x, d\mathfrak{A}) - \lambda_k P_k(y, d\mathfrak{A})] + \lambda_k \int\limits_{\mathfrak{A}_z} P_{kn}(z, \mathfrak{E}) P_k(y, d\mathfrak{A})$$

$$\geqq m_{kn}(\mathfrak{E}) \int\limits_{\mathfrak{A}_z} [P_k(x, d\mathfrak{A}) - \lambda_k P_k(y, d\mathfrak{A})] + \lambda_k P_{k-1,n}(y, \mathfrak{E})$$

$$= m_{kn}(\mathfrak{E})(1 - \lambda_k) + \lambda_k P_{k-1,n}(y, \mathfrak{E}),$$

$$P_{k-1,n}(y, \mathfrak{E}) - P_{k-1,n}(x, \mathfrak{E}) \leqq (1 - \lambda_k)[P_{k-1,n}(y, \mathfrak{E}) - m_{kn}(\mathfrak{E})]$$

und wegen (25)

$$(27) \qquad P_{k-1,n}(y, \mathfrak{E}) - P_{k-1,n}(x, \mathfrak{E}) \leqq (1 - \lambda_k)[M_{kn}(\mathfrak{E}) - m_{kn}(\mathfrak{E})].$$

Da (27) für beliebige x und y gilt, ist auch

$$(28) \qquad M_{k-1,n}(\mathfrak{E}) - m_{k-1,n}(\mathfrak{E}) \leqq (1 - \lambda_k)[M_{kn}(\mathfrak{E}) - m_{kn}(\mathfrak{E})].$$

Setzt man in (28) $k = m+1, m+2, \ldots, n$, so erhält man nach Multiplikation der so gewonnenen Ungleichungen

$$(29) \qquad M_{mn}(\mathfrak{E}) - m_{mn}(\mathfrak{E}) \leqq \prod_{k=m+1}^{k=n} (1 - \lambda_k).$$

Die rechte Seite von (29) konvergiert mit $n \to \infty$ gegen Null, und damit ist unser Satz bewiesen.

In dem homogenen Falle mit diskreter Zeit gilt folgender

Satz II. *Wenn für beliebige x, y und $\mathfrak{E}$*

$$(30) \qquad P(x, \mathfrak{E}) \geqq \lambda P(y, \mathfrak{E}), \quad \lambda > 0,$$

ist, konvergiert $P^n(x, \mathfrak{E})$ gleichmäßig gegen eine feste Verteilungsfunktion $Q(\mathfrak{E})$.

Beweis. Im gegenwärtigen Falle ist

$$M_{n,n+p}(\mathfrak{E}) = \sup [P^p(x, \mathfrak{E})] = M_p(\mathfrak{E}),$$

$$m_{n,n+p}(\mathfrak{E}) = \inf [P^p(x, \mathfrak{E})] = m_p(\mathfrak{E}),$$

$$\lambda_n = \lambda$$

und wegen (29)

$$(31) \qquad M_p(\mathfrak{E}) - m_p(\mathfrak{E}) \leqq (1 - \lambda)^p.$$

Da wegen (25) und (26) für $q > p$ die Formeln

$$(32) \qquad P^q(x, \mathfrak{E}) = P_{0q}(x, \mathfrak{E}) \leqq M_{q-p,q}(\mathfrak{E}) = M_p(\mathfrak{E}),$$

$$(33) \qquad P^q(x, \mathfrak{E}) \geqq m_p(\mathfrak{E})$$

gelten, so ist

$$M_p(\mathfrak{E}) \geqq M_q(\mathfrak{E}) \geqq m_q(\mathfrak{E}) \geqq m_p(\mathfrak{E}). \tag{34}$$

Aus (31) und (34) folgt unmittelbar unser Satz.

Wichtige Spezialfälle des Satzes II wurden von Hostinsky und Hadamard bewiesen[5]). Die Verteilungsfunktion $Q(\mathfrak{E})$ genügt, wie in den erwähnten Spezialfällen Hadamard gezeigt hat, der Integralgleichung

$$Q(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{A}_x} P(x, \mathfrak{E})\, Q(d\mathfrak{A}). \tag{35}$$

In dem Falle des allgemeinsten stochastisch-definiten Schema gilt

Satz III. *Wenn für eine Folge*

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \to +\infty$$

und beliebige x, y *und* $\mathfrak{E}$

$$P(t_{n-1}, x, t_n, \mathfrak{E}) \geqq \lambda_n P(t_{n-1}, y, t_n, \mathfrak{E}), \qquad \lambda_n \geqq 0, \tag{36}$$

ist, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

divergiert, so ist das Ergodenprinzip (22a) *erfüllt und die Konvergenz von* (22a) *gleichmäßig in* x, y, $\mathfrak{E}$.

Beweis. Es sei bei festem $t^{(0)}$

$$\sup\,[P(t^{(0)}, x, t, \mathfrak{E})] = M(t, \mathfrak{E}),$$
$$\inf\,[P(t^{(0)}, x, t, \mathfrak{E})] = m(t, \mathfrak{E}).$$

Wenn

$$t^{(0)} \leqq t_m \leqq t_n \leqq t < t_{n+1}$$

ist, erhält man wie beim Beweis des Satzes I als Analogon zu (29) die Formel

$$M(t, \mathfrak{E}) - m(t, \mathfrak{E}) \leqq \prod_{k=m+1}^{k=n} (1 - \lambda_n). \tag{37}$$

Da n mit t unendlich groß wird, konvergiert die Differenz $M(t, \mathfrak{E}) - m(t, \mathfrak{E})$ mit t gegen Null, womit unser Satz bewiesen ist.

Im Falle des nach der Zeit homogenen Schemas gilt endlich der dem Satz II analoge

Satz IV. *Wenn es ein solches* σ *gibt, das für beliebige* x, y, $\mathfrak{E}$

$$P(\sigma, x, \mathfrak{E}) \geqq \lambda P(\sigma, y, \mathfrak{E}), \qquad \lambda > 0, \tag{37}$$

ist, konvergiert $P(\tau, x, \mathfrak{E})$ *mit* $\tau \to +\infty$ *gleichmäßig gegen eine feste Verteilungsfunktion* $Q(\mathfrak{E})$.

---

[5]) Comptes rendus **186** (1928), S. 59, 189, 275.

Zweites Kapitel.

Endliche Systeme von Zuständen.

§ 5.

Einleitende Betrachtungen.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Menge $\mathfrak{A}$ aus endlich vielen Elementen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

besteht. In diesem Falle setzt man

$$P(t_1, x_i, t_2, x_j) = P_{ij}(t_1, t_2). \tag{38}$$

Da offenbar für eine beliebige Menge $\mathfrak{E}$

$$P(t_1, x_i, t_2, \mathfrak{E}) = \sum_{x_k \subset \mathfrak{E}} P_{ik}(t_1, t_2) \tag{39}$$

ist, braucht man nur die Wahrscheinlichkeiten $P_{ij}(t_1, t_2)$ zu betrachten. Die Fundamentalgleichung (3) erhält sodann die Gestalt

$$\sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t_3) = P_{ik}(t_1, t_3), \tag{40}$$

während die Gleichung (1) die Form

$$\sum_j P_{ij}(t_1, t_2) = 1 \tag{41}$$

bekommt. Beliebige nicht-negative Funktionen $P_{ij}(t_1, t_2)$, welche (40) und (41) genügen, definieren einen stochastisch-definiten Prozeß der Veränderung des Systems $\mathfrak{S}$.

Man definiert jetzt den Operator $*$ folgendermaßen:

$$F_{ik} = F_{ik}^{(1)} * F_{ik}^{(2)} = \sum_j F_{ij}^{(1)} F_{jk}^{(2)}, \tag{42}$$

wodurch die Fundamentalgleichung (40) sich in

$$P_{ik}(t_1, t_2) * P_{ik}(t_2, t_3) = P_{ik}(t_1, t_3) \tag{43}$$

verwandelt.

Im Falle des Schemas mit diskreter Zeit setzt man

$$P_{pq}(x_i, x_j) = P_{ij}^{(pq)}, \qquad P_p(x_i, x_j) = P_{ij}^{(p)}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten $P_{ij}^{(p)}$ genügen dabei der Gleichung

$$\sum_j P_{ij}^{(p)} = 1, \tag{44}$$

umgekehrt, wenn willkürliche nicht-negative Größen $P_{ij}^{(p)}$ die letzte Gleichung erfüllen, können diese Größen als die entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerte in einem stochastisch-definiten Prozesse betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeiten $P_{ij}^{(pq)}$ berechnet man dabei nach der Formel

$$P_{ij}^{(pq)} = P_{ij}^{(p+1)} * P_{ij}^{(p+2)} * \ldots * P_{ij}^{(q)}. \tag{45}$$

Im Falle des homogenen Schemas mit diskreter Zeit hat man

$$P_{ij}^{(p)} = P_{ij}, \quad P_{ij}^{(pq)} = [P_{ij}]_*^{q-p} = P_{ij}^{q-p}.$$

Wenn alle Größen P_{ij} positiv sind, so sind offensichtlich die Bedingungen des Satzes II des § 4 erfüllt, und P_{ij}^q konvergiert folglich mit $q \to \infty$ gegen einen festen Limes Q_j. Die Integralgleichung (35) verwandelt sich in unserem Falle in das System von Gleichungen

$$Q_i = \sum_j Q_j P_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{46}$$

Diese Resultate wurden von Hostinsky und Hadamard erhalten[6]).

§ 6.

Differentialgleichungen des kontinuierlichen stochastischen Prozesses.

Es ist wegen (11)

$$\begin{cases} P_{ii}(t, t) = 1, \\ P_{ij}(t, t) = 0, \quad i \neq j. \end{cases} \tag{47}$$

Wenn die Änderungen unseres Systems $\mathfrak{S}$ in jedem Zeitmoment t möglich sind, ist es natürlich vorauszusetzen, daß

$$\begin{cases} \lim\,[P_{ii}(t, t + \Delta)] = 1, \\ \lim\,[P_{ij}(t, t + \Delta)] = 0, \quad \Delta \to 0,\ i \neq j, \end{cases} \tag{47a}$$

ist, d. h. daß für kleine Zeitintervalle die Wahrscheinlichkeit der Änderung des Zustandes des Systems klein ist. Diese Voraussetzung ist in der Hypothese der Stetigkeit der Funktionen $P_{ij}(t_1, t_2)$ nach t_1 und t_2 enthalten.

Man nehme jetzt an, daß die Funktionen $P_{ij}(s, t)$ stetig und für $t \neq s$ nach t und s differenzierbar sind. Für $t = s$ fordern wir die Differenzierbarkeit nicht. Es wäre a priori unvorsichtig, in diesen singulären Stellen die Existenz der Ableitung vorauszusetzen[7]).

Es ist für $t > s$

$$\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} = \lim \frac{P_{ik}(s, t + \Delta) - P_{ik}(s, t)}{\Delta} \tag{48}$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta}\Big[\sum_j P_{ij}(s, t)\, P_{jk}(t, t + \Delta) - P_{ik}(s, t)\Big]$$

$$= \lim \Big[\sum_{j \neq k} P_{ij}(s, t) \frac{P_{jk}(t, t + \Delta)}{\Delta} + P_{ik}(s, t) \frac{P_{kk}(t, t + \Delta) - 1}{\Delta}\Big], \qquad \Delta \to 0.$$

---

[6]) Siehe [5]).

[7]) Vgl. mit den im Kap. IV betrachteten Funktionen $F(s, x, t, y)$, welche für $t = s$ notwendig Unstetigkeitspunkte besitzen.

Wenn die Determinante

$$\Xi = |P_{ij}(s, t)|$$

von Null verschieden ist, so kann man die Gleichungen

$$\sum_{j \neq k} P_{ij}(s, t) \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} + P_{ik}(s, t) \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = \alpha_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lösen:

$$(49) \qquad \begin{cases} \dfrac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = \dfrac{\Delta_{kk}}{\Xi}, \\ \dfrac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = \dfrac{\Delta_{jk}}{\Xi}, \qquad j \neq k. \end{cases}$$

Da wegen (48) α_{ik} mit $\Delta \to 0$ gegen $\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t}$ konvergieren, so konvergieren die Größen (49) ebenfalls gegen bestimmtes Limites:

$$(50\,\text{a}) \qquad \lim \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = A_{kk}(t),$$

$$(50\,\text{b}) \qquad \lim \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = A_{jk}(t), \qquad j \neq k.^{8)}$$

Daß die Determinante Ξ für ein passendes $s < t$ wirklich von Null verschieden sein kann, sieht man aus der Relation

$$(51) \qquad \lim \Xi = 1, \qquad s \to t,$$

welche vermöge der Stetigkeit von Ξ und der Formeln (47) erfüllt ist.

Aus (48) und (50) folgt unmittelbar *das erste System der Differentialgleichungen* für die Funktionen $P_{ik}(s, t)$:

$$(52) \qquad \boxed{\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) P_{ij}(s, t) = P_{ik}(s, t) * A_{ik}(t)}.$$

Dabei ist wegen (47) und (50)

$$(53) \qquad A_{jk}(t) = \left[\frac{\partial P_{jk}(t, u)}{\partial u}\right]_{u=t},$$

$$(54) \qquad A_{jk} \geqq 0, \qquad j \neq k, \qquad A_{kk} \leqq 0,$$

und wegen (41) und (50)

$$(55) \qquad \sum_k A_{jk} = 0.$$

Die Gleichungen (52) wurden nur in der Hypothese $s < t$ festgesetzt, aber wegen (47) und (53) sieht man, daß sie auch für $t = s$ erfüllt sind.

---

8) Man könnte auch umgekehrt (47 a) und (50) a priori voraussetzen und daraus die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit von $P_{ij}(s, t)$ nach t beweisen.

Es ist ferner für $s < t$

$$(56)\qquad \frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial s} = \lim \frac{P_{ik}(s+\Delta,t) - P_{ik}(s,t)}{\Delta}$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta}\left[P_{ik}(s+\Delta,t) - \sum_j P_{ij}(s,s+\Delta)\, P_{jk}(s+\Delta,t)\right]$$

$$= -\lim\left[\frac{P_{ii}(s,s+\Delta)-1}{\Delta} P_{ik}(s+\Delta,t) + \sum_{j\neq i} \frac{P_{ij}(s,s+\Delta)}{\Delta} P_{jk}(s+\Delta,t)\right],\quad \Delta\to 0,$$

und wegen (50) erhält man *das zweite System der Differentialgleichungen*

$$(57)\qquad \boxed{\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial s} = -\sum_j A_{ij}(s)\, P_{jk}(s,t) = -A_{ik}(s) * P_{ik}(s,t)}\,.$$

Wenn die Funktionen $A_{ij}(s)$ stetig sind, so gelten offensichtlich die Gleichungen (57) auch für $s = t$.

Es sei jetzt für ein Zeitmoment t_0 eine Verteilungsfunktion

$$Q(t_0, x_k) = Q_k(t_0), \qquad \sum_k Q_k(t_0) = 1$$

gegeben für die Wahrscheinlichkeit, daß das System $\mathfrak{S}$ sich im Moment t_0 im Zustande x_k befindet. Die Gleichung (5) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$Q_k(t) = \sum_i Q_i(t_0)\, P_{ik}(t_0, t).$$

Wegen (52) genügen die Funktionen $Q_k(t)$ den Differentialgleichungen

$$(58)\qquad \frac{dQ_k(t)}{dt} = \sum_j A_{jk}(t)\, Q_j(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn die Funktionen $A_{ik}(t)$ stetig sind, so bilden die Funktionen $P_{ik}(s,t)$ das einzige den Anfangsbedingungen (47) genügende Lösungssystem der Gleichungen (52); folglich *wird unser stochastischer Prozeß durch die $A_{ik}(t)$ vollständig definiert.* Die reelle Bedeutung der Funktionen $A_{ik}(t)$ kann man folgendermaßen erläutern: Für $i \neq k$ ist $A_{ik}(t)\,dt$ die Wahrscheinlichkeit des Überganges aus dem Zustande x_i in den Zustand x_k im Laufe der Zeit von t bis $t + dt$, während

$$A_{kk}(t) = -\sum_{j\neq k} A_{kj}(t)$$

ist. Man kann auch zeigen, daß, *falls irgendwelche stetigen Funktionen $A_{ik}(t)$ unter den Bedingungen* (54) *und* (55) *beliebig gegeben sind, die Lösungen $P_{ik}(s,t)$ der Differentialgleichungen* (52) mit den Anfangsbedingungen (47) nicht-negativ sind und die Bedingungen (40) und (41) erfüllen, d. h. *einen möglichen stochastischen Prozeß definieren.*

Es ist in der Tat wegen (52) und (55)

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_k P_{ik}(s, t) = \sum_j \Big[\sum_k A_{jk}(t) \Big] P_{ij}(s, t) = 0 \tag{59}$$

und, da vermöge (47)

$$\sum_k P_{ik}(t, t) = 1$$

ist, folgt aus (59) die Relation (41).

Man setzt ferner für $t_1 < t_2$

$$P'_{ik}(t_1, t) = P_{ik}(t_1, t), \quad \text{wenn} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \tag{60}$$

$$P'_{ik}(t_1, t) = \sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t), \quad \text{wenn} \quad t_2 < t. \tag{61}$$

Die Funktionen $P'_{ik}(t_1, t)$ sind stetig und genügen den Differentialgleichungen (52); folglich gilt die Gleichung (60) für beliebige t, und nicht nur für $t \leqq t_3$; sodann fällt die Formel (61), wenn man $t = t_3$ setzt, mit (40) zusammen.

Es bleibt zu beweisen, daß die Lösungen $P_{ik}(t_1, t)$ nicht-negativ sind. Für diesen Zweck setzt man

$$\psi(t) = \operatorname{Min}[P_{ik}(t, s)].$$

Offensichtlich hat man für passend gewählte i und k

$$D^+ \psi(t) = \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t}, \qquad P_{ik}(s, t) = \psi(t),$$

und, wenn $\psi(t) \leqq 0$ ist, so folgt vermöge (54)

$$A_{kk}(t) P_{ik}(s, t) \geqq 0,$$

$$A_{jk}(t) P_{ij}(s, t) \geqq A_{jk}(t) \psi(t), \quad j \neq k,$$

$$D^+ \psi(t) = \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) P_{ij}(s, t) \geqq \sum_{j \neq k} A_{jk}(t) \psi(t) = R(t) \psi(t).$$

Da $\psi(s) = 0$ ist, sieht man leicht, daß $\psi(t)$ größer als jede negative Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = R(t) y$$

ist und folglich selbst nicht negativ sein soll.

§ 7.

Beispiele.

In den nach der Zeit homogenen Schemata hängen die $A_{ik}(t)$ von der Zeit t nicht ab, der Prozeß ist in diesem Falle durch n^2 Konstanten A_{ik}

vollständig bestimmt. Die Gleichungen (52) gehen dann in die folgende

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = \sum_j A_{jk} P_{ij}(t) \tag{62}$$

über; diese Gleichungen kann man ohne Schwierigkeit lösen. Wenn alle Größen A_{jk} von Null verschieden sind, so sind die Bedingungen des Satzes IV des § 4 erfüllt, und $P_{ik}(t)$ konvergiert folglich mit $t \to \infty$ gegen einen festen Limes Q_k. Die Größen Q_k genügen den Gleichungen

$$\sum_k Q_k = 1,$$

$$\sum_j A_{jk} Q_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Man nehme z. B. an, daß

$$n = 2,$$
$$A_{12} = A_{21} = A,$$
$$A_{11} = A_{22} = -A,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeiten des Überganges aus dem Zustande x_1 in den Zustand x_2 und des umgekehrten Überganges gleich seien. Die Differentialgleichungen (62) geben für unseren Fall

$$P_{12}(t) = P_{21}(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-2At}\right],$$

$$P_{11}(t) = P_{22}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-2At}\right].$$

Wir sehen, daß die $P_{ik}(t)$ mit $t \to \infty$ nach $Q_k = \frac{1}{2}$ konvergieren.

Folgendes Beispiel zeigt, daß die Konvergenz nach Q_k mit gedämpften Schwingungen begleitet sein kann:

$$n = 3,$$
$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = A,$$
$$A_{21} = A_{32} = A_{13} = 0,$$
$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = -A,$$

$$P_{11}(t) = P_{22}(t) = P_{33}(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}At} \cos \alpha t + \frac{1}{3},$$

$$P_{12}(t) = P_{23}(t) = P_{31}(t) = e^{-\frac{3}{2}At}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha t - \frac{1}{3} \cos \alpha t\right] + \frac{1}{3},$$

$$P_{21}(t) = P_{32}(t) = P_{13}(t) = -e^{-\frac{3}{2}At}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha t + \frac{1}{3} \cos \alpha t\right] + \frac{1}{3},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} A.$$

Die analogen gedämpften Schwingungen wurden für die Schemata mit diskreter Zeit von Romanowsky entdeckt.

Drittes Kapitel.

Abzählbare Systeme von Zuständen.

§ 8.

Einleitende Betrachtungen, diskrete Schemata.

Wenn die Menge $\mathfrak{A}$ aus abzählbar vielen Elementen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

besteht, erhält man alle Bezeichnungen und Resultate von § 5 des vorigen Kapitels. Die Konvergenz der Reihen

$$\sum_k P_{ik}(t_1, t_2) = 1, \qquad \sum_k F_{ik} = 1$$

wird dabei vorausgesetzt, daraus folgt die Konvergenz von Reihen (40), (42), (46); dagegen verlangen wir nicht, daß die Reihe

$$\sum_i P_{ik}(t_1, t_2)$$

konvergent sei.

Wir geben jetzt nur einige Bemerkungen über die Schemata mit diskreter Zeit, und zwar über die homogenen. Die Bedingungen unserer Sätze über das Ergodenprinzip gelten für die Schemata mit abzählbar vielen Zuständen in den meisten Fällen nicht, aber das Prinzip selbst ist dessen ungeachtet öfters erfüllt. Zum Beispiel betrachten wir ein von Herrn S. Bernstein neuerdings betrachtetes Spiel[9]), in welchem ein Spieler in jeder Partei einen Taler mit der Wahrscheinlichkeit A gewinnen und mit der Wahrscheinlichkeit B, $B > A$, $A + B \leqq 1$, verlieren kann, vorausgesetzt, daß sein Vermögen von Null verschieden ist; im letzteren Falle verliert er nichts.

Wenn x_n der Zustand ist, in welchem der Spieler $n-1$ Taler besitzt, schreibt man die Bedingungen des Spiels folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &P_{n,n+1} = A, \quad P_{n+1,n} = B && (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ &P_{11} = 1 - A, && \\ &P_{nn} = 1 - A - B && (n = 2, 3, 4, \ldots), \\ &P_{ij} = 0, \qquad \text{in allen anderen Fällen.} && \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß

$$\lim P_{ij}^p = \left(1 - \frac{A}{B}\right)\left(\frac{A}{B}\right)^{j-1} = Q_j, \quad p \to \infty,$$

$$\sum_j Q_j = 1$$

gilt, woraus das Ergodenprinzip folgt.

---

[9]) Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 141 (russ.).

Es sei bemerkt, daß aus der Existenz von Limites

$$\lim P_{ij}^p = A_j, \quad p \to \infty,$$

nur dann das Ergodenprinzip folgt, wenn die Summe

$$\sum_j A_j = A$$

gleich *Eins* ist. Man könnte zeigen, daß stets $A \leqq 1$ ist, und daß im Falle $A < 1$ das Ergodenprinzip nicht gelten kann.

Wenn alle A_j existieren und gleich Null sind, tritt die Frage hervor über die asymptotische Darstellung von P_{ij}^p für $p \to \infty$. Wenn eine solche Darstellung unabhängig von i möglich ist:

$$P_{ij}^p = \lambda_j^p + o(\lambda_j^p),$$

so sagt man, daß *das lokale Ergodenprinzip* erfüllt ist. Das letztere Prinzip scheint im Falle der abzählbar vielen möglichen Zustände von großer Wichtigkeit zu sein.

Es seien jetzt die möglichen Zustände x mittels aller ganzen Zahlen $(-\infty < n < +\infty)$ numeriert. Alle Bezeichnungen und Formeln des § 5 bleiben dabei erhalten, nur erstrecken sich die Summationszeichen über alle ganzen Zahlen. Wir betrachten näher den Fall

$$P_{ij} = P_{j-i}.$$

Offenbar gilt in diesem Falle auch

$$P_{ij}^p = P_{j-i}^p,$$

$$P_k^{p+1} = \sum_i P_i^p P_{k-i},$$

$$P_k^{m+n} = \sum_i P_i^m P_{k-i}^n.$$

Wenn die Reihen

$$a = \sum_k k P_k,$$

$$b^2 = \sum_k k^2 P_k$$

absolut konvergieren, kann man *die Laplacesche asymptotische Formel* folgendermaßen schreiben:

$$P_k^p = \frac{1}{b\sqrt{2\pi p}} e^{-\frac{(k-pa)^2}{2pb^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right). \tag{63}$$

Was die Geltungsbedingungen dieser Formel betrifft, so wissen wir nur, daß sie im Bernoullischen Falle stattfindet, in dem

$$P_0 = 1 - A, \quad P_1 = A \tag{64}$$

ist und alle anderen P_k verschwinden. Der Liapounoffsche Satz leistet für unser Problem nichts, wie man aus dem Beispiel

$$P_{+1} = P_{-1} = \frac{1}{2},$$

$$P_k = 0, \quad k \neq \pm 1,$$

schließt, in dem (63) nicht gilt. Für die Gültigkeit von (63) ist im allgemeinen notwendig, daß für jedes ganze m ein k existiert, für welches

$$k \not\equiv 0 \pmod{m}, \quad P_k \neq 0,$$

ist.

Es sei noch bemerkt, daß nur im Falle $a = 0$ die Formel (63) bei festem k wirklich eine asymptotische Darstellung von P_k^p gibt. In diesem Falle folgt aus (63) bei festem k

$$P_k^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi n b}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{65}$$

und bei festem i und j

$$P_{ij}^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi n b}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{66}$$

Wegen (66) ist in dem jetzt betrachteten Falle das lokale Ergodenprinzip erfüllt.

Eine ganz besondere Art von Annäherungsformeln für P_{ij}^p erhält man, wenn die Wahrscheinlichkeiten P_{ii} der Unveränderlichkeit des Zustandes des Systems in jedem einzigen Änderungsmoment nur sehr wenig von Eins verschieden sind. Zum Beispiel im Bernoullischen Falle (64) gilt für die kleinen Werte von A *die Poissonsche Annäherungsformel*

$$P_k^p \sim \frac{A^k p^k}{k!} e^{-Ap}. \tag{67}$$

Die allgemeine Methode zur Ableitung von solchen Formeln erhält man durch die Anwendung der Differentialgleichungen von nach der Zeit kontinuierlichen Prozessen, wie es für die Formel (67) in § 10 gezeigt wird.

§ 9.

Differentialgleichungen des nach der Zeit kontinuierlichen Prozesses.

Wie im § 6 setzen wir voraus, daß die Funktionen $P_{ij}(s, t)$ stetig und für $t \neq s$ nach t und s differenzierbar sind. Die Formeln (48) und (56) gelten in dem jetzt zu betrachtenden Falle der abzählbar vielen möglichen Zustände wie früher, aber um die Vertauschbarkeit des Limeszeichens mit dem Summenzeichen in diesen Formeln zu beweisen und somit die Differentialgleichungen (52) und (57) festzustellen, muß man jetzt neue einschränkende Bedingungen einführen, und zwar die folgenden:

A. Existenz der Limites (50).

B. Gleichmäßigkeit der Konvergenz von (50b) nach j bei festem k.

C. Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k \neq j} \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = \frac{1 - P_{jj}(t, t+\Delta)}{\Delta} \tag{68}$$

nach Δ (daß diese Reihe konvergiert, folgt unmittelbar aus (41)).

Die Bedingung A war im § 6 für den Fall der endlich vielen Zustände bewiesen auf Grund der Differenzierbarkeit der Funktionen $P_{ij}(s, t)$ für $t \neq s$; im abzählbaren Falle dagegen scheint sie daraus nicht zu folgen. Zur Bedingung B sei bemerkt, daß die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von (50b) nach k bei festem j aus der evidenten Ungleichung

$$P_{jk}(t, t+\Delta) \leqq 1 - P_{jj}(t, t+\Delta)$$

folgt. Dagegen wird die Gleichmäßigkeit von (50b) für beliebige j und k ebenso wie die Gleichmäßigkeit von (50a) nach k nicht verlangt; diese Forderungen wären für die Anwendungen unbequem.

Da die Faktoren $P_{ij}(s, t)$ in der Formel (48) eine absolut konvergente Reihe bilden, so kann man wegen der Bedingungen A und B in dieser Formel Limes- und Summenzeichen vertauschen und so die Differentialgleichung (52) erhalten. Dabei genügen die Größen $A_{jk}(t)$ offensichtlich den Formeln (53) und (54); die Formel (55) ist wegen der Bedingung C ebenfalls erfüllt. Aus der letzten Bedingung und der gleichmäßigen Beschränktheit der Faktoren $P_{jk}(s+\Delta, t)$ folgt auch die Vertauschbarkeit des Limes- und Summenzeichens in der Formel (56), welche für die Herleitung der Differentialgleichung (57) genügt.

§ 10.

Eindeutigkeit und Berechnung der Lösungen im nach der Zeit homogenen Falle.

In diesem Falle gehen die Gleichungen (52) in die folgenden

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = \sum_j A_{jk} P_{ij}(t) = P_{ik}(t) * A_{ik} \tag{69}$$

über, wobei A_{jk} Konstanten sind. Wir beweisen im Falle der Konvergenz der Reihen

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j |A_{jk}| = B_k^{(1)}, \\ \sum_j B_j^{(1)} |A_{jk}| = B_k^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_j B_j^{(n)} |A_{jk}| = B_k^{(n+1)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right. \tag{70}$$

$$\sum_n \frac{B_k^{(n)}}{n!} x^n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad |x| \leqq \theta > 0, \tag{71}$$

und der Anfangsbedingungen

$$(72) \qquad \begin{cases} P_{ii}(0) = 1, \\ P_{ij}(0) = 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

daß die Gleichungen (69) ein einziges, den Bedingungen unseres Problems genügendes Lösungssystem $P_{ik}(t)$ besitzen.

Da stets $P_{ij}(t) \leqq 1$ ist, so erhält man in der Tat vermöge (69) und (70) die Ungleichung

$$\left| \frac{dP_{ik}(t)}{dt} \right| \leqq B_k^{(1)},$$

folglich kann man (69) gliedweise differenzieren:

$$\frac{d^2 P_{ik}(t)}{dt^2} = \sum_j A_{jk} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} P_{ik}(t) * A_{ik}.$$

In analoger Weise erhält man die allgemeinen Relationen

$$(73) \qquad \left| \frac{d^n}{dt^n} P_{ik}(t) \right| \leqq B_k^{(n)},$$

$$(74) \qquad \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} P_{ik}(t) = \frac{d^n}{dt^n} P_{ik}(t) * A_{ik}.$$

Aus (73) und der Konvergenzbedingung für die Reihen (71) folgt, daß die $P_{ik}(t)$ analytisch sind. Ferner erhält man vermöge (69) und (74)

$$(75) \qquad \frac{d^n}{dt^n} P_{ik}(t) = P_{ik}(t) * [A_{ik}]_*^n,$$

insbesondere hat man für $t = 0$ wegen (72)

$$(76) \qquad \frac{d^n}{dt^n} P_{ik}(0) = [A_{ik}]_*^n,$$

woraus folgt, daß die analytischen Funktionen $P_{ik}(t)$ durch die Konstanten A_{ik} eindeutig bestimmt sind. Die Formeln (76) und (75) dienen auch zur Berechnung der Lösungen des Systems (69) durch die Taylorschen Reihen.

Zum Beispiel, wenn

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= A, \\ A_{ii} &= -A, \\ A_{ij} &= 0, \quad \text{in allen anderen Fällen,} \end{aligned}$$

ist, erhält man leicht

$$\begin{aligned} P_{mn}(t) &= \frac{(At)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-At}, \qquad n \geqq m, \\ P_{mn}(t) &= 0, \qquad m > n, \end{aligned}$$

oder *die Poissonsche Verteilungsformel*; diese stimmt für $k = n - m$, $p = t$ mit (67) überein.

Wenn das Ergodenprinzip erfüllt ist und $P_{ik}(t)$ gegen Q_k mit $\Delta \to \infty$ konvergiert, genügen offensichtlich die Konstanten Q_k den Gleichungen

$$(77)\qquad \begin{cases} \sum_k Q_k = 1, \\ \sum_i A_{ik} Q_i = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Zum Beispiel, wenn

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= A, \\ A_{i+1\, i} &= B, \quad B > A, \\ A_{11} &= -A, \\ A_{ii} &= -(A+B), \quad i > 1, \\ A_{ij} &= 0, \quad \text{in allen anderen Fällen,} \end{aligned}$$

ist, erhält man leicht aus den Gleichungen (77)

$$Q_n = \left(1 - \frac{A}{B}\right)\left(\frac{A}{B}\right)^{n-1}$$

Als zweites Beispiel setzen wir

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= A, \\ A_{i+1,i} &= iB, \\ A_{ii} &= -A - (i-1)B, \\ A_{ij} &= 0, \quad \text{in allen anderen Fällen.} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (77) liefern uns in diesem Falle

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{A}{B}\right)^n e^{-\frac{A}{B}},$$

also wieder die Poissonsche Formel.

Viertes Kapitel.

Kontinuierliche Systeme von Zuständen, einparametriger Fall.

§ 11.

Einleitende Betrachtungen.

Es sei jetzt der Zustand des betrachtenden Systems durch einen reellen Parameter x definiert; wir bezeichnen in diesem Falle mit x den Zustand selbst, sowie den zugehörigen Wert des Parameters. Wenn $\mathfrak{E}_y$ die Menge aller Zustände x mit $x \leqq y$ ist, so setzen wir

$$F(t_1, x, t_2, y) = P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}_y).$$

$F(t_1, x, t_2, y)$ ist als Funktion von y monoton und nach rechts stetig und genügt den Grenzbedingungen

$$(78)\qquad F(t_1, x, t_2, -\infty) = 0, \quad F(t_1, x, t_2, +\infty) = 1.$$

Die Fundamentalgleichung (3) verwandelt sich für $F(t_1, x, t_2, y)$ in die folgende:

$$F(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_2, y, t_3, z)\, dF(t_1, x, t_2, y). \tag{79}$$

Man kehrt so zum Gebrauch der integralen Verteilungsfunktionen der zufälligen Größen und der Stieltjesschen Integrale im gewöhnlichen Sinne zurück.

Das Integral (79) ist nach Lebesgue[10]) gewiß bestimmt, wenn $F(t_2, y, t_3, z)$ nach y im Borelschen Sinne meßbar ist. Wir setzen im folgenden voraus, daß das System $\mathfrak{F}$ (siehe § 1) mit dem System aller Borelschen Mengen zusammenfällt, woraus die Borelsche Meßbarkeit von $F(t_1, x, t_2, y)$ nach x folgt. Dabei ist bekanntlich die additive Mengenfunktion $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ für alle Borelschen Mengen $\mathfrak{E}$ durch die entsprechende Funktion $F(t_1, x, t_2, y)$ eindeutig bestimmt.

Wir nennen die monotone und nach rechts stetige Funktion $F(y)$, welche den Grenzbedingungen

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$$

genügt, *die normale Verteilungsfunktion.* Wenn $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ als Funktionen von x im Borelschen Sinne meßbar und als Funktionen von y normale Verteilungsfunktionen sind, so gilt dasselbe auch von der Funktion

$$F(x, y) = F_1(x, y) \oplus F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(z, y)\, dF_1(x, z). \tag{80}$$

Dieser Operator $\oplus$ ist wie $*$ assoziativ; mit seiner Hilfe schreibt man die Fundamentalgleichung (79) in der Form

$$F(t_1, x, t_3, y) = F(t_1, x, t_2, y) \oplus F(t_2, x, t_3, y). \tag{81}$$

Wenn $F_1(x, y) = V_1(y - x)$, $F_2(x, y) = V_2(y - x)$ ist, so gilt, wie man leicht ausrechnet,

$$F_1(x, y) \oplus F_2(x, y) = V(y - x) = V_1(y - x) \odot V_2(y - x), \tag{82}$$

$$V(x) = V_1(x) \odot V_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_2(x - z)\, dV_1(z), \tag{83}$$

Der Operator $\odot$ ist auch assoziativ und überdies für die normalen Verteilungsfunktionen kommutativ; wenn man $V_1(x)$ und $V_2(x)$ als Verteilungsfunktionen für zwei unabhängige zufällige Größen X_1 und X_2 betrachtet, so stellt bekanntlich $V_1(x) \odot V_2(x)$ die Verteilungsfunktion für die Summe $X = X_1 + X_2$ dar[11]).

---

[10]) Leçons sur l'intégration, 2. Ausg., S. 261.

[11]) Siehe z. B.: P. Lévy, Calcul des probabilités, S. 187.

Wenn $F(t_1, x, t_2, y)$ als Funktion von y totalstetig ist, so hat man

(84) $$F(t_1, x, t_2, y) = \int_{-\infty}^{y} f(t_1, x, t_2, y)\, dy.$$

Die nicht-negative Funktion $f(t_1, x, t_2, y)$ ist dabei nach x und nach y im Borelschen Sinne meßbar und genügt den Gleichungen

(85) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x, t_2, y)\, dy = 1,$$

(86) $$f(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x, t_2, y) f(t_2, y, t_3, z)\, dy.$$

Umgekehrt wenn $f(t_1, x, t_2, y)$ alle diese Forderungen erfüllt, gelten für die nach (84) definierte Funktion $F(t_1, x, t_2, y)$ die Gleichungen (78) und (79); folglich definiert eine solche Funktion $f(t_1, x, t_2, y)$ ein Schema eines möglichen stochastischen Prozesses. Diese Funktion $f(t_1, x, t_2, y)$ nennen wir weiter *die differentiale Verteilungsfunktion* für die zufällige Größe y.

Wir merken uns noch die folgenden gemischten Formeln:

(87) $$F(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_2, y, t_3, z) f(t_1, x, t_2, y)\, dy,$$

(88) $$f(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_2, y, t_3, z)\, dF(t_1, x, t_2, y).$$

Im Falle des nach der Zeit diskreten Schemas betrachtet man die Funktionen

$$F_{mn}(x, y) = F(t_m, x, t_n, y),$$
$$F_n(x, y) = F_{n-1, n}(x, y),$$

welche den Gleichungen

(89) $$F_{m, n+1}(x, y) = F_{mn}(x, y) \oplus F_{n+1}(x, y),$$

(90) $$F_{kn}(x, y) = F_{km}(x, y) \oplus F_{mn}(x, y), \quad k < m < n,$$

genügen. Wenn

$$F_{mn}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} f_{mn}(x, y)\, dy, \quad f_n(x, y) = f_{n-1, n}(x, y)$$

ist, so hat man überdies

(91) $$f_{m, m+1}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{mn}(x, y) f_{n+1}(y, z)\, dy,$$

(92) $$f_{kn}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{km}(x, y) f_{mn}(y, z)\, dy, \quad k < m < n.$$

§ 12.

Die Lindebergsche Methode. Übergang von den diskreten zu den kontinuierlichen Schemata.

Wie im § 3 bemerkt wurde, werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie gewöhnlich nur die nach der Zeit diskreten Schemata betrachtet. Das fundamentale Problem für diese Schemata besteht in der Aufstellung der Annäherungsformeln für die Verteilungen $F_{mn}(x, y)$ mit großen Differenzen $n - m$, oder, was im wesentlichen dasselbe ist, der asymptotischen Formeln für $F_{mn}(x, y)$ bei $n \to \infty$. Das wichtigste Resultat in dieser Richtung ist der Laplace-Liapounoffsche Satz. Wir wollen jetzt den Lindebergschen Beweis[12]) dieses Satzes näher untersuchen, um seinen Hauptgedanken in möglichst allgemeiner Form herauszubekommen und dadurch eine allgemeine Methode zur Herleitung der asymptotischen Formeln für $F_{mn}(x, y)$ zu erhalten.

Es sei

$$F_n(x, y) = V_n(y - x),$$

$$a_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)\, dF_n(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dV_n(y) = 0,$$

$$b_n^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 dF_n(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, dV_n(y) = b_n^2,$$

$$B_{mn}^2 = b_{m+1}^2 + b_{m+2}^2 + \ldots + b_n^2;$$

der Laplace-Liapounoffsche Satz behauptet unter einigen Nebenvoraussetzungen, daß bei festem m und wachsendem n

$$F_{mn}(x, y) = \Phi\left(\frac{y - x}{B_{mn}}\right) + o(1),$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

gleichmäßig nach x und y gilt.

Wir betrachten neben dem durch die Funktionen $F_n(x, y)$ definierten stochastischen Prozeß mit diskreter Zeit einen anderen mit kontinuierlicher Zeit; dieser letztere Prozeß sei mittels der Funktion

$$\bar{F}(t', x, t'', y) = \Phi\left(\frac{y - x}{\sqrt{t'' - t'}}\right)$$

charakterisiert. Es sei ferner

$$t_0 = 0, \quad t_n = B_{0n}^2,$$

$$\bar{F}_{mn}(x, y) = \bar{F}(t_m, x, t_n, y),$$

$$\bar{F}_n(x, y) = \bar{F}_{n-1, n}(x, y).$$

---

[12]) Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 211.

Man hat offensichtlich

$$\bar{F}_n(x, y) = \Phi\left(\frac{y-x}{b_n}\right),$$

$$\bar{a}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)\, d\bar{F}_n(x, y) = 0,$$

$$\bar{b}_n^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2\, d\bar{F}_n(x, y) = b_n,$$

dabei fallen die ersten und zweiten Momente $\bar{a}_n(x)$ und $\bar{b}_n^2(x)$ der Verteilung $\bar{F}_n(x, y)$ mit entsprechenden Momenten $a_n(x)$ und $\bar{b}_n(x)$ der Verteilungen $F_n(x, y)$ zusammen; auf Grund der letzteren Tatsache beweist Lindeberg, daß die Differenz

$$F_{mn}(x, y) - \bar{F}_{mn}(x, y)$$

mit $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, dann folgt der Laplace-Liapounoffsche Satz aus der evidenten Formel

$$\bar{F}_{mn}(x, y) = \Phi\left(\frac{y-x}{B_{mn}}\right).$$

Im allgemeinen Falle beliebiger Funktionen $F_n(x, y)$ kann man ebenfalls die Lindebergsche Methode anwenden, wenn man eine Funktion $\bar{F}(t', x, t'', y)$ kennt, welche einen kontinuierlichen stochastischen Prozeß definiert und für eine Folge der Zeitmomente

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$$

mit $a_n(x)$ und $b_n^2(x)$ zusammenfallende oder von derselben nur wenig abweichende Momente $\bar{a}_n(x)$ und $\bar{b}_n^2(x)$ ergibt. Die allgemeine Methode zur Herleitung solcher Funktionen $\bar{F}$ wird sodann durch Anwendung der Differentialgleichungen der kontinuierlichen Prozesse erhalten, welche in den folgenden Paragraphen betrachtet werden. Zum Übergang von $\bar{F}$ zu F kann man den folgenden Satz benutzen:

Übertragungssatz. *Es seien durch die Funktionen $F_n(x, y)$ und $\bar{F}_n(x, y)$ zwei stochastische Prozesse mit diskreter Zeit definiert. Wenn*

$$(93) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)\, dF_n(x, y) = a_n(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)\, d\bar{F}_n(x, y) = \bar{a}_n(x),$$

$$(94) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2\, dF_n(x, y) = b_n^2(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2\, d\bar{F}_n(x, y) = \bar{b}_n^2(x),$$

$$(95) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3\, dF_n(x, y) = c_n(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3\, d\bar{F}_n(x, y) = \bar{c}_n(x),$$

$$(96) \qquad \begin{cases} |a_n(x) - \bar{a}_n(x)| \leqq p_n, \\ |b_n^2(x) - \bar{b}_n^2(x)| \leqq q_n, \\ c_n(x) \leqq r_n, \\ \bar{c}_n(x) \leqq \bar{r}_n \end{cases}$$

ist und eine solche Funktion $R(x)$ *existiert, daß*

$$(97)\qquad \begin{cases} R(x)=0, & \text{wenn } x\leqq 0,\\ 0\leqq R(x)\leqq 1, & \text{wenn } 0<x<l,\\ R(x)=1, & l\leqq x,\end{cases}$$

$$(98)\qquad U_{kn}(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(z-y)\,d\bar F_{kn}(x,y),$$

$$(99)\qquad \begin{cases} \left|\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,z)\right|\leqq K_n^{(1)},\\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,z)\right|\leqq K_n^{(2)},\\ \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_{kn}(x,z)\right|\leqq K_n^{(3)} & (k=0,1,2,\ldots,n)\end{cases}$$

ist, so hat man

$$(100)\qquad \bar F_{0n}(x,y-l)-\varepsilon_n\leqq F_{0n}(x,y)\leqq \bar F_{0n}(x,y+l)+\varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_n=K_n^{(1)}\sum_{k=1}^{n}p_k+\frac{1}{2}K_n^{(2)}\sum_{k=1}^{n}q_k+\frac{1}{6}K_n^{(3)}\sum_{k=1}^{n}(r_k+\bar r_k).$$

Für die Anwendung dieses Satzes im Falle, wo die Momente $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ bei wachsendem x unbeschränkt sind, kann man öfters die Unbeschränktheit durch Einführung einer neuen passend gewählten Variablen $x'=\varphi(x)$ beseitigen.

Beweis des Übertragungssatzes. Man hat wegen (98)

$$(101)\qquad U_{k-1,n}(x,y)=\bar F_{k-1,n}(x,y)\oplus R(y-x)$$
$$=\bar F_k(x,y)\oplus \bar F_{k+1}(x,y)\oplus\ldots\oplus \bar F_n(x,y)\oplus R(y-x)=\bar F_k(x,y)\oplus U_{kn}(x,y)$$

und wegen (93), (94), (95), (99)

$$(102)\qquad U_{k-1,n}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{kn}(z,y)\,d\bar F_k(x,z)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U_{kn}(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,y)(z-x)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,y)\frac{(z-x)^2}{2}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_{kn}(\xi,y)\frac{(z-x)^3}{6}\right]d\bar F_k(x,z)$$
$$=U_{kn}(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,y)\,\bar a_k(x)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,y)\frac{\bar b_k^2(x)}{2}+\bar\theta K_n^{(3)}\frac{\bar c_k(x)}{6},\qquad |\bar\theta|\leqq 1.$$

Wenn man

$$(103)\qquad V_{k-1,n}(x,y)=F_k(x,y)\oplus U_{kn}(x,y)$$

setzt, so gilt die zu (102) analoge Formel

$$(104)\qquad V_{k-1,n}(x,y)=U_{k,n}(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,y)\,a_k(x)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,y)\frac{b_k^2(x)}{2}+\theta K_n^{(3)}\frac{c_k(x)}{6},\qquad |\theta|\leqq 1.$$

Aus (102) und (104) folgt vermöge (96) und (99)

$$(105)\qquad |U_{k-1,n}(x,y) - V_{k-1,n}(x,y)| \leqq K_n^{(1)} p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} (r_k + \bar{r}_k).$$

Es sei ferner

$$(106)\qquad W_{kn}(x,y) = F_{0k}(x,y) \oplus U_{kn}(x,y)$$

$$= F_1(x,y) \oplus F_2(x,y) \oplus \ldots \oplus F_k(x,y) \oplus U_{kn}(x,y) = F_{0,k-1}(x,y) \oplus V_{k-1,n}(x,y),$$

dann ist wegen (105)

$$\begin{aligned} &|W_{kn}(x,y) - W_{k-1,n}(x,y)| \\ &= |F_{0,k-1}(x,y) \oplus V_{k-1,n}(x,y) - F_{0,k-1}(x,y) \oplus U_{k-1,n}(x,y)| \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [V_{k-1,n}(z,y) - U_{k-1,n}(z,y)]\, dF_{0,k-1}(x,z) \\ &\leqq \sup |V_{k-1,n}(z,y) - U_{k-1,n}(z,y)| \\ &\leqq K_n^{(1)} p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} (r_k + \bar{r}_k), \end{aligned}$$

$$(107)\qquad \begin{aligned} &|W_{nn}(x,y) - W_{0,n}(x,y)| \\ &\leqq K_n^{(1)} \sum_{k=1}^{n} p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} \sum_{k=1}^{n} q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} \sum_{k=1}^{n} (r_k + \bar{r}_k) = \varepsilon_n. \end{aligned}$$

$$W_{nn}(x,y) = F_{0n}(x,y) \oplus R(y-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(y-z)\, dF_{0n}(x,z).$$

Wenn man in Betracht zieht, daß

$$W_{0n}(x,y) = \bar{F}_{0n}(x,y) \oplus R(y-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(y-z)\, d\bar{F}_{0n}(x,z)$$

ist, so erhält man wegen (97)

$$(108)\qquad \begin{cases} W_{nn}(x,y) \leqq \int_{-\infty}^{y} dF_{0n}(x,z) = F_{0n}(x,y), \\ W_{nn}(x,y+l) \geqq \int_{-\infty}^{y} dF_{0n}(x,z) = F_{0n}(x,y), \\ W_{0n}(x,y) \geqq \int_{-\infty}^{y-l} d\bar{F}_{0n}(x,z) = \bar{F}_{0n}(x,y-l), \\ W_{0n}(x,y+l) \leqq \int_{-\infty}^{y+l} d\bar{F}_{0n}(x,z) = \bar{F}_{0n}(x,y+l). \end{cases}$$

Aus (107) und (108) folgt unmittelbar die Formel (100). Für die Einzelheiten der Beweisführung siehe die erwähnte Lindebergsche Abhandlung.

§ 13.

Die erste Differentialgleichung für die nach der Zeit kontinuierlichen Prozesse.

Wenn in unserem System $\mathfrak{S}$ in jedem Zeitmoment t Änderungen auftreten können, ist es natürlich vorauszusetzen, daß große Änderungen des Parameters x in kleinen Zeitintervallen nur sehr selten stattfinden, oder genauer, daß für jedes positive ε

$$(109)\qquad P(t, x, t+\Delta, |y-x| > \varepsilon) \to 0, \quad \Delta \to 0,$$

ist. In den meisten Fällen kann man voraussetzen, daß auch die schärfere Bedingung

$$(110)\quad m^{(p)}(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^p \, dF(t, x, t+\Delta, y) \to 0, \qquad \Delta \to 0,$$

wenigstens für die ersten Momente $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ erfüllt ist. Eine allgemeine Untersuchung der Möglichkeiten, welche in diesen Voraussetzungen vorkommen, wäre von großem Interesse; wegen einiger Bemerkungen darüber möge auf den § 19 verwiesen werden.

In den nächsten Paragraphen wird vorausgesetzt, daß noch die wichtige Bedingung

$$(111)\qquad \frac{m^{(3)}(t, x, \Delta)}{m^{(2)}(t, x, \Delta)} \to 0, \quad \Delta \to 0,$$

erfüllt ist. Diese Bedingung gilt sicher, wenn für unendlich kleine Δ nur unendlich kleine Differenzen $y - x$ in der Bestimmung von $m^{(3)}(t, x, \Delta)$ durch die Formel (110) wesentlich sind, oder genauer, wenn

$$(112)\qquad \frac{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |y-x|^3 \, dF(t, x, t+\Delta, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 \, dF(t, x, t+\Delta, y)} \to 1, \quad \Delta \to 0,$$

ist. Nur in diesem Falle wird unser stochastischer Prozeß im eigentlichen Sinne nach der Zeit kontinuierlich. Aus (111) folgt auch die Formel

$$\frac{m^{(2)}(t, x, \Delta)}{m^{(1)}(t, x, \Delta)} \to 0, \quad \Delta \to 0.$$

Außerdem setzen wir voraus, daß bei $s \neq t$ alle partiellen Ableitungen von $F(s, x, t, y)$ bis zur vierten Ordnung existieren und bei festem t und y für $t - s > k > 0$ nach s und x gleichmäßig beschränkt sind. Aus (78) und (110) schließt man, daß bei $s = t$ dagegen $F(s, x, t, y)$ notwendig eine Unstetigkeit besitzt. Die Funktion

$$(113)\qquad f(s, x, t, y) = \frac{\partial}{\partial x} F(s, x, t, y)$$

genügt offensichtlich den Gleichungen (84), (85), (86) und besitzt bei festen t und y für $t - s > k > 0$ nach s und x gleichmäßig beschränkte Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Alle weiteren Rechnungen führen wir für diese differentiale Verteilungsfunktion $f(s, x, t, y)$ aus.

Es sei

$$(114) \qquad a(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) f(t, x, t + \Delta, y)\, dy,$$

$$(115) \qquad b^2(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 f(t, x, t + \Delta, y)\, dy = m^{(2)}(t, x, \Delta),$$

$$(116) \qquad c(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x|^3 f(t, x, t + \Delta, y)\, dy = m^{(3)}(t, x, \Delta).$$

Man hat vermöge (85) und (86)

$$(117) \qquad f(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, s + \Delta, z) f(s + \Delta, z, t, y)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, s + \Delta, z) \Big[f(s + \Delta, x, t, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(s + \Delta, x, t, y)(z - x)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s + \Delta, x, t, y) \frac{(z - x)^2}{2} + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}(s + \Delta, \xi, t, y) \frac{(z - x)^3}{6} \Big] dz$$

$$= f(s + \Delta, x, t, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(s + \Delta, x, t, y)\, a(s, x, \Delta)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s + \Delta, x, t, y) \frac{b^2(s, x, \Delta)}{2} + \theta \frac{c(s, x, \Delta)}{6}, \qquad |\theta| < C,$$

bei $s + \Delta < \tau < t$ kann dabei C unabhängig von Δ gewählt werden. Aus (117) folgt unmittelbar

$$(118) \qquad \frac{f(s + \Delta, x, t, y) - f(s, x, t, y)}{\Delta}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} f(s + \Delta, x, t, y) \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s + \Delta, x, t, y) \frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta} + \theta \frac{c(s, x, \Delta)}{6\Delta}.$$

Jetzt wollen wir zuerst beweisen, daß, wenn die Determinante

$$(119) \qquad D(s, x, t', y', t'', y'') = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t', x') & \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t'', y'') \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t', y') & \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t'', y'') \end{vmatrix}$$

bei festen x und s nicht identisch nach t', y', t'', y'' verschwindet, die Verhältnisse

$$\frac{a(s, \Delta, x)}{\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{b^2(s, \Delta, x)}{2\Delta}$$

mit $\Delta \to 0$ zu bestimmten Grenzwerten $A(s, x)$ und $B^2(s, x)$ konvergieren. Es seien in der Tat t', y', t'', y'' so gewählt, daß (119) nicht verschwindet, in diesem Falle ist für jedes genügend kleine Δ auch

$$D(s + \Delta, x, t', y', t'', y'') \neq 0,$$

so daß die Gleichungen

$$(120)\quad \begin{cases} \lambda(\Delta)\frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t', y') + \mu(\Delta)\frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t'', y'') = 0, \\ \lambda(\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t', y') + \mu(\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t'', y'') = 1 \end{cases}$$

eindeutig lösbar sind. Dabei konvergieren $\lambda(\Delta)$ und $\mu(\Delta)$ mit $\Delta \to 0$ nach $\lambda(0)$ und $\mu(0)$. Vermöge (118) erhält man ferner

$$(121)\quad \lambda(\Delta)\frac{f(s+\Delta, x, t', y') - f(s, x, t', y')}{\Delta} + \mu(\Delta)\frac{f(s+\Delta, x, t'', y'') - f(s, x, t'', y'')}{\Delta}$$
$$= -\frac{b^2(s, \Delta, x)}{2\Delta} - (\theta' + \theta'')\frac{c(s, \Delta, x)}{6\Delta}.$$

Die linke Seite von (121) konvergiert mit $\Delta \to 0$ nach

$$\Omega = \lambda(0)\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t', y') + \mu(0)\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t'', y'');$$

in der rechten Seite von (121) ist vermöge der Bedingung (111) das zweite Glied unendlich klein im Vergleich mit dem ersten, folglich konvergiert dieses erste Glied zu dem festen Limes

$$(122)\quad B^2(s, x) = \lim \frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta} = \Omega, \quad \Delta \to 0.$$

Aus (122) und (111) folgt unmittelbar, daß

$$(123)\quad \frac{c(s, x, \Delta)}{\Delta} \to 0, \quad \Delta \to 0,$$

ist.

Wegen (122) und (123) geht die Formel (118) für $\Delta = 0$ in die folgende über:

$$\lim \left[\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)\frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta}\right] = -\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y) B^2(s, x).$$

Da $\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)$ nicht identisch nach t und y verschwindet, existiert auch der Limes

$$(124)\quad A(s, x) = \lim \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta} = \frac{-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y) B^2(s, x)}{\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)},$$
$$\Delta \to 0.$$

Aus (118), (122), (123) und (124) folgt durch den Grenzübergang *die erste fundamentale Differentialgleichung*:

$$(125)\quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) = &-A(s, x)\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y) \\ &- B^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y). \end{aligned}}$$

Wenn die Determinante $D(s, x, t', y', t'', y'')$ bei beliebigen t', y', t'', y'' verschwindet, existieren im allgemeinen die Grenzwerte $A(s, x)$ und $B^2(s, x)$ nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f(s, x, t, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y^3-x^3)^2}{4(t-s)}} \tag{126}$$

Hier ist bei $x = 0$

$$\frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta} \to +\infty, \quad \Delta \to 0.$$

Man könnte jedoch zeigen, daß *solche Ausnahmepunkte* (s, x) *auf der* (s, x)-*Ebene nirgends dicht liegen.*

Die reelle Bedeutung dieser sehr wichtigen Größen $A(s, x)$ und $B(s, x)$ ist die folgende: $A(s, x)$ ist die mittlere Geschwindigkeit der Veränderung des Parameters x im Laufe des unendlich kleinen Zeitintervalles. $B(s, x)$ ist die differentiale Dispersion des Prozesses. Die Dispersion der Differenz $y - x$ im Zeitintervalle Δ ist

$$b(s, x, \Delta) = B(s, x)\sqrt{2\Delta} + o(\sqrt{\Delta}) = O(\sqrt{\Delta}), \tag{127}$$

der Mittelwert dieser Differenz ist

$$a(s, x, \Delta) = A(s, x)\Delta + o(\Delta) = O(\Delta). \tag{128}$$

Es ist vielleicht nötig zu bemerken, daß der Mittelwert $m^{(1)}(t, x, \Delta)$ von $|y - x|$ wie die Dispersion $b(s, x, \Delta)$ von der Größenordnung $\sqrt{\Delta}$ ist. Wie es im folgenden Paragraphen gezeigt wird, in manchen Fällen charakterisieren die Funktionen $A(s, x)$ und $B(s, x)$ eindeutig unser stochastisches Schema.

§ 14.

Die zweite Differentialgleichung.

In diesem Paragraphen erhalten wir aufrecht alle Forderungen über die Funktion $f(s, x, t, y)$ des vorigen Paragraphen und setzen überdies voraus, daß $f(s, x, t, y)$ stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung hat. Dann folgert man leicht aus (120), daß, wenn die Determinante (119) nicht verschwindet, $\lambda(0)$ und $\mu(0)$ stetige Ableitungen nach s und x bis zur zweiten Ordnung haben; wegen (120) und (124) gilt offensichtlich dasselbe für $B^2(s, x)$ und $A(s, x)$.

Es sei jetzt für ein festes t ein Intervall $a \leqq y \leqq b$ gegeben, derart, daß in keinem seiner Punkte die Determinante $D(t, y, u', z', u'', z'')$ identisch nach u', z', u'', z'' verschwindet. Es sei ferner $R(y)$ eine nur auf der Strecke $a < y < b$ von Null verschiedene nicht-negative Funktion mit beschränkten Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Dann hat man

$$(129)\qquad \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(s,x,t,y)\, R(y)\, dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(s,x,t,y)\, R(y)\, dy$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(s,x,t+\Delta,y) - f(s,x,t,y)]\, R(y)\, dy$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} R(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x,t,z)\, f(t,z,t+\Delta,y)\, dz\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x,t,y)\, R(y)\, dy \right\}$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x,t,z) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,z,t+\Delta,y)\Big[R(z) + R'(z)(y-z) + R''(z)\frac{(y-z)^2}{2}\right.$$

$$\left. + R'''(\xi)\frac{(y-z)^3}{6}\Big]\, dy\, dz - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x,t,z)\, R(z)\, dz \right\}$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x,t,z)\Big[R'(z)\, a(t,z,\Delta) + R''(z)\frac{b^2(t,z,\Delta)}{2} + \theta\frac{c(t,z,\Delta)}{6}\Big]\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x,t,z)\, [R'(z)\, A(t,z) + R''(z)\, B^2(t,z)]\, dz$$

$$= \int_a^b f(s,x,t,y)\, [R'(y)\, A(t,y) + R''(y)\, B^2(t,y)]\, dy, \qquad |\theta| \leqq \sup |R'''(\xi)|.$$

Um den Limesübergang nach Δ in dieser Rechnung zu rechtfertigen, bemerke man, daß $\frac{a(t,z,\Delta)}{\Delta}$, $\frac{b^2(t,z,\Delta)}{2\Delta}$ und $\frac{c(t,z,\Delta)}{\Delta}$ bzw. nach $A(t,z)$, $B^2(t,z)$ und nach Null gleichmäßig konvergieren, und daß der Faktor $f(s,x,t,z)$ ein endliches Integral nach z besitzt.

Nach einer partiellen Integration erhält man

$$(130)\qquad \int_a^b f(s,x,t,y)\, R'(y)\, A(t,y)\, dy = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}[f(s,x,t,y)\, A(t,y)]\, R(y)\, dy$$

und mittels einer zweifachen partiellen Integration hat man ferner

$$(131)\qquad \int_a^b f(s,x,t,y)\, R''(y)\, B^2(t,y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial y^2}[f(s,x,t,y)\, B^2(t,y)]\, R(y)\, dy,$$

da $R(a) = R(b) = R'(a) = R'(b) = 0$ ist. Aus (129), (130) und (131) folgt unmittelbar

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y)\, R(y)\, dy \tag{132}$$

$$= \int_a^b \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}[A(t,y)\, f(s,x,t,y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t,y)\, f(s,x,t,y)] \right\} R(y)\, dy;$$

da $R(y)$ bis auf die oben erwähnten Bedingungen willkürlich ist, schließt man leicht, daß für die (t, y)-Punkte mit nicht identisch verschwindender Determinante $D(t, y, u', z', u'', z'')$ auch *die zweite fundamentale Differentialgleichung*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} f(s,x,t,y) = -\frac{\partial}{\partial y}[A(t,y) f(s,x,t,y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t,y)\, f(s,x,t,y)]} \tag{133}$$

gilt.

Man könnte auch diese zweite Gleichung ohne Hilfe der ersten direkt mit den Methoden des § 13 ableiten, aber in diesem Falle würde man neue schwierigere Voraussetzungen über die Funktion $f(s, x, t, y)$ brauchen, welche hier nicht formuliert werden. Man würde dabei aus der zu (118) analogen Formel

$$\frac{f(s,x,t,y) - f(s,x,t-\Delta,y)}{\Delta} = f(s, x, t-\Delta, y) \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\, dz - 1}{\Delta} \tag{134}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} f(s, x, t-\Delta, y) \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\,(z-y)\, dz}{\Delta}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, x, t-\Delta, y) \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\,(z-y)^2\, dz}{2\Delta}$$

$$+ \theta \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\, |z-y|^3\, dz}{6\Delta}$$

ausgehen, dann beweisen, daß

$$\lim \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\, |z-y|^3\, dz}{\Delta} = 0, \qquad \Delta \to 0,$$

ist und daß die Limites

$$\lim \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\,(z-y)^2\, dz}{2\Delta} = \bar{B}^2(t, y), \tag{135}$$

$$\lim \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\,(z-y)\, dz}{\Delta} = \bar{A}^2(t, y), \tag{136}$$

$$\lim \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\Delta, z, t, y)\, dz - 1}{\Delta} = \bar{N}(t, y), \qquad \Delta \to 0, \tag{137}$$

existieren und so unsere zweite Gleichung in der Form

$$(138)\qquad \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) = \bar{N}(t, y)\, f(s, x, t, y) + \bar{A}(t, y) \frac{\partial}{\partial y} f(s, x, t, y) + \bar{B}^2(t, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, x, t, y)$$

erhalten. Um diese letzte Form mit der früher gefundenen zu identifizieren, sollte man noch beweisen, daß

$$(139)\qquad \bar{B}^2(t, y) = B^2(t, y),$$

$$(140)\qquad \bar{A}(t, y) = -A(t, y) + \frac{\partial}{\partial y} B^2(t, y),$$

$$(141)\qquad \bar{N}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} A(t, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B^2(t, y)$$

ist.

§ 15.

Fragestellungen über Eindeutigkeit und Existenz der Lösungen für die zweite Differentialgleichung.

Um die Funktion $f(s, x, t, y)$ durch die Differentialgleichungen (125) oder (133) eindeutig zu definieren, sollte man natürlich irgendwelche Anfangsbedingungen aufstellen. Für die zweite Gleichung (133) kann man folgendermaßen verfahren: Wegen der Formel (85) genügt die Funktion $f(s, x, t, y)$ für jedes $t > s$ der Bedingung

$$(142)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y)\, dy = 1,$$

während man wegen der Bedingung (110) überdies

$$(143)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 f(s, x, t, y)\, dy \to 0, \qquad t \to s,$$

hat. Die Hauptfrage über die Eindeutigkeit der Lösungen ist die folgende: *Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß bei gegebenen s und x nur eine für alle Werte von y und $t > s$ definierte nicht-negative Funktion von t und y $f(s, x, t, y)$ existieren kann, welche der Gleichung* (133) *und den Bedingungen* (142) *und* (143) *genügt?* In wichtigen Spezialfällen kann man auf diese Frage eine positive Antwort geben, zum Beispiel in allen Fällen, welche in den beiden nächsten Paragraphen betrachtet werden.

Es seien jetzt die Funktionen $A(t, y)$ und $B^2(t, y)$ a priori gegeben; man kann sich fragen, ob eine nicht-negative Funktion $f(s, x, t, y)$ existiert, welche den Gleichungen (85) und (86) genügt (diese Forderungen sind, wie es in § 11 erklärt ist, notwendig, damit $f(s, x, t, y)$ ein stochastisches

Schema definieren könnte) und nach dem Grenzübergang gemäß den Formeln (122) und (124) die gegebenen Funktionen $A(t, y)$ und $B^2(t, y)$ ergibt?

Zur Lösung einer solchen Aufgabe kann man zunächst etwa eine nichtnegative und den Bedingungen (142) und (143) genügende Lösung unserer zweiten Differentialgleichung (133) bestimmen und dann untersuchen, ob sie wirklich eine Lösung unserer Aufgabe darstellt. Dabei entstehen die zwei allgemeinen Fragen:

1. *Unter welchen Bedingungen existiert eine solche Lösung der Gleichung* (133)?

2. *Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß diese Lösung wirklich den Gleichungen* (85) *und* (86) *genügt?*

Es bestehen alle Gründe, daß diese Bedingungen einen hinreichend umfassenden Charakter haben.

§ 16.

Der Bachelierische Fall.

Wir nehmen jetzt an, daß $f(s, x, t, y)$ beliebig von s und t abhängt und im übrigen Funktion von der Differenz $y - x$ ist, d. h. daß unser Prozeß nach dem Parameter homogen ist:

$$f(s, x, t, y) = v(s, t, y - x). \tag{147}$$

Offenbar hängen in diesem Falle $A(s, x)$ und $B(s, x)$ nur von s ab, so daß man die Differentialgleichungen (125) und (133) in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A(s)\frac{\partial f}{\partial x} - B^2(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{148}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A(t)\frac{\partial f}{\partial y} + B^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{149}$$

schreiben kann. Für die Funktion $v(s, t, z)$ ergeben (148) und (149) die Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \quad A(s)\frac{\partial v}{\partial z} - B^2(s)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{150}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A(t)\frac{\partial v}{\partial z} + B^2(t)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{151}$$

Die Gleichung (151) war von Bachelier entdeckt[13]), aber im richtigen Sinne dieses Wortes nicht bewiesen.

Wenn identisch $A(t) = 0$ und $B(t) = 1$ ist, so geht die Gleichung (133) bzw. (149) in die Wärmegleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{152}$$

---

[13]) Siehe Fußnote [2]) I und III.

über, deren einzige nicht-negative und den Bedingungen (142) und (143) genügende Lösung bekanntlich durch die Laplacesche Formel

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}} \tag{153}$$

gegeben ist.

Für den allgemeinen Fall setzen wir

$$x' = x - \int_a^s A(u)\,du, \qquad y' = y - \int_a^t A(u)\,du,$$

$$s' = \int_a^s B^2(u)\,du, \qquad t' = \int_a^t B^2(u)\,du.$$

Dann geht die Gleichung (149) in

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

über, und die Bedingungen (142) und (143) erhalten für die neuen Veränderlichen s', x', t', y' dieselbe Form wie für s, x, t, y. Folglich ist im allgemeinen Falle

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t'-s')}} e^{-\frac{(y'-x')^2}{4(t'-s')}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\beta}} \tag{154}$$

$$\left(\beta = \int_s^t B^2(u)\,du, \qquad \alpha = x + \int_s^t A(u)\,du\right)$$

die einzige unseren Bedingungen genügende Lösung von (149).

§ 17.

Eine Transformation.

Es sei

$$\left\{\begin{array}{ll} s' = \varphi(s), & t' = \varphi(t), \\ x' = \psi(s, x), & y' = \psi(t, y), \\ f(s, x, t, y) = \frac{\partial \psi(t, y)}{d y} f'(s', x', t', y'), & \end{array}\right. \tag{155}$$

wobei man voraussetzt, daß $\varphi(t)$ stetig und nirgends abnehmend ist, während $\psi(t, y)$ nach t beliebig ist und nach y eine stetige positive Ableitung hat. Wenn $f(s, x, t, y)$ den Bedingungen (85) und (86) genügt, so gilt dasselbe, wie man es leicht nachrechnen kann, auch für die Funktion f' in bezug auf die neuen Variablen s', x', t', y'; d. h. *unsere Transformation führt zu einer neuen Funktion $f'(s', x', t', y')$, welche ebenso gut wie $f(s, x, t, y)$ ein neues stochastisches Schema definiert.*

Wenn $\varphi(t)$ und $\psi(t, y)$ die notwendigen Ableitungen besitzen, so gehen die Gleichungen (125) und (133) für die neuen Variablen in die

folgenden

$$\frac{\partial f'}{\partial s'} = -A'(s', x')\frac{\partial f'}{\partial x'} - B'^2(s', x')\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}, \tag{156}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial y'}[A'f'] + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}[B'^2 f'] \tag{157}$$

über, wobei

$$\left\{\begin{aligned} A'(t', y') &= \frac{\frac{\partial^2 \psi(t,y)}{\partial y^2} B^2(t,y) + \frac{\partial \psi(t,y)}{\partial y} A(t,y) + \frac{\partial \psi(t,y)}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi(t)}{dt}}, \\ B'^2(t', y') &= \frac{\left[\frac{\partial \psi(t,y)}{\partial y}\right]^2 B^2(t,y)}{\frac{d\varphi(t)}{dt}} \end{aligned}\right. \tag{158}$$

gesetzt ist.

Man kann mit Hilfe der obigen Transformation die Lösungen von (133) für viele neue Typen der Koeffizienten $A(t, y)$ und $B^2(t, y)$ aufstellen. Es sei z. B.

$$\left\{\begin{aligned} A(t, y) &= a(t)\,y + b(t), \\ B^2(t, y) &= c(t); \end{aligned}\right. \tag{159}$$

wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(t) &= \int c(t)\, e^{2\int a(t)\,dt} dt, \\ \psi(t) &= y e^{\int a(t)\,dt} + \int b(t)\, e^{\int a(t)\,dt} dt \end{aligned}\right. \tag{160}$$

und erhalten für die neuen Veränderlichen s', x', t', y', f' die einfachste Wärmegleichung

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial y'^2}. \tag{161}$$

Dabei bleiben die Anfangsbedingungen (142) und (143) für $f'(s', x', t', y')$ ungeändert, folglich gibt die Formel

$$f' = \frac{1}{\sqrt{\pi(t'-s')}}\, e^{-\frac{(y'-x')^2}{4(t'-s')}} \tag{162}$$

zusammen mit (160) und (155) die einzige unseren Bedingungen genügende Lösung $f(s, x, t, y)$ der Gleichung (133) mit Koeffizienten von der Form (159). Man kann leicht sehen, daß in diesem Falle die Funktion $f(s, x, t, y)$ notwendig von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\beta}}\, e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\beta}} \tag{163}$$

ist, wobei α und β nur von s, x, t und nicht von y abhängen. Es ist ein wichtiges Problem, *alle möglichen Typen der Koeffizienten* $A(t, y)$ *und* $B^2(t, y)$ *zu finden, für welche man bei beliebigen* s, x, t *immer die Laplacesche Verteilungsfunktion* (163) *erhält.*

Als ein zweites Beispiel betrachten wir den Fall

$$(164)\qquad \begin{cases} A(t, y) = a(t)(y-c), \\ B^2(t, y) = b(t)(y-c)^2. \end{cases}$$

Wenn man jetzt

$$(165)\qquad \begin{cases} \varphi(t) = \int b(t)\,dt, \\ \psi(t) = \lg(y-c) + \int [b(t) - a(t)]\,dt \end{cases}$$

setzt, so erhält man für $f'(s', x', t', y')$ wieder die Gleichung (161), für welche man die Lösung (162) schon kennt. Es sei bemerkt, daß man dabei nur die Werte $x > c$, $y > c$ zu betrachten hat, da, wenn x oder y sich von c bis $+\infty$ ändert, x' bzw. y' alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Einige Schwierigkeiten, welche im Zusammenhang mit diesen Umständen mit der Übertragung der Bedingungen (142) und (143) auf f' entstehen, kann man leicht vermeiden.

Insbesondere hat man im Falle

$$(166)\qquad A(t, y) = 0, \qquad B^2(t, y) = y^2$$

die Formel

$$(107)\qquad f(s, x, t, y) = \frac{1}{y\sqrt{\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{(\lg y + t - \lg x - s)^2}{4(t-s)}}$$

Vom Standpunkte der Anwendungen ist der Fall, in welchem $A(t, y)$ und $B(t, y)$ nur von y und nicht von der Zeit t abhängen, der wichtigste. In dieser Richtung wäre das nächste zu erzielende Ergebnis die Lösung unseres Problems für Koeffizienten von der Form

$$(168)\qquad \begin{cases} A(y) = ay + b, \\ B^2(y) = cy^2 + dy + e. \end{cases}$$

§ 18.

Die stabilen Verteilungsfunktionen.

Wenn für ein Zeitmoment t eine differentiale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $g(t_0, y)$ gegeben ist, so wird analog zu der allgemeinen Formel (5) die Verteilungsfunktion $g(t, y)$ für beliebige $t > t_0$ durch die Formel

$$(169)\qquad g(t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0, x)\, f(t_0, x, t, y)\, dx$$

gegeben. Offensichtlich genügt $g(t, y)$ der Gleichung

$$(170)\qquad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[A(t, y) g] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t, y) g].$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die Koeffizienten $A(t, y)$ und $B(t, y)$ nur von y abhängen (Homogenität des Prozesses nach der Zeit) und unter-

suchen, welche Funktionen $g(t, y)$ unverändert mit der Zeit bleiben. Offenbar ist für eine solche Funktion

$$(171) \qquad ((B^2)' - A)g + B^2 g' = C.$$

Wenn man voraussetzt, daß g und g' für $y = \pm\infty$ gegen Null konververgieren und dabei so schnell, daß dasselbe auch von der linken Seite von (171) gilt, ist offenbar $C = 0$ und man hat

$$(172) \qquad \frac{g'}{g} = \frac{A - (B^2)'}{B^2}.$$

Außerdem soll die Funktion die $g(y)$ die Bedingung

$$(173) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g\,dy = 1$$

erfüllen.

In den meisten Fällen kann man beweisen, daß, wenn eine stabile Lösung $g(x)$ existiert, so $f(s, x, t, y)$ bei $t \to \infty$ und beliebigen Konstanten s und x gegen $g(y)$ konvergiert; auf diese Weise erkennt man $g(y)$ nicht nur als stabile Lösung sondern auch als *Grenzlösung.*

Wenn die Koeffizienten A und B^2 von der Form (168) sind, fällt (172) mit der Pearsonschen Gleichung

$$(174) \qquad \frac{g'}{g} = \frac{y - p}{q_0 + q_1 y + q_2 y^2}$$

zusammen, wobei

$$(175) \qquad p = \frac{d - b}{a - 2c}, \qquad q_0 = \frac{c}{a - 2c}, \qquad q_1 = \frac{d}{a - 2c}, \qquad q_2 = \frac{e}{a - 2c}$$

gesetzt ist. Wir können also *stochastische Schemata konstruieren, welche als Stabillösung eine beliebige Pearsonsche Verteilungsfunktion haben.*

§ 19.

Andere Möglichkeiten.

Die in den Paragraphen 13 bis 18 entwickelte Theorie beruht wesentlich auf der Bedingung (111). Wenn man diese Bedingung wegfallen läßt, entstehen sogar unter Geltung der Bedingung (110) manche neue Möglichkeiten. Als Beispiel betrachten wir das durch die Verteilungsfunktion

$$(176) \qquad F(s, x, t, y) = e^{-a(t-s)}\,\sigma(y - x) + [1 - e^{-a(t-s)}] \int_{-\infty}^{y} u(z)\,dz$$

definierte Schema, wobei $\sigma(z) = 0$ für $z < 0$ und $\sigma(z) = 1$ für $z \geqq 0$, während $u(z)$ eine stetige nicht negative Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(z)\,dz = 1$$

und den endlichen Momenten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(z)\,|z|^i\,dz \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ist. Daß $F(s, x, t, y)$ die Forderungen (78) und (79) ebenso wie (110) befriedigt, kann man ohne Schwierigkeiten nachrechnen.

Man kann dieses Schema so deuten: Im Laufe des unendlich kleinen Zeitintervalles $(t, t + dt)$ bleibt der Parameter y mit der Wahrscheinlichkeit $1 - a\,dt$ ohne Änderung und geht in $y', z < y' < z + dz$ mit der Wahrscheinlichkeit $a\,u(z)\,dt\,dz$ über. Man hat also in jedem Zeitintervalle die Möglichkeit eines Sprunges, wobei die Verteilungsfunktion für die Werte des Parameters y nach dem Sprunge von dem vorigen Werte desselben Parameters unabhängig ist.

Es sei für $t = t_0$ eine stetige differentiale Verteilungsfunktion $g(t_0, y)$ gegeben. Für beliebige $t > t_0$ ist

$$g(t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0, y)\,dF(t_0, x, t, y) = e^{-a(t-t_0)} g(t_0, y) + [1 - e^{-a(t-t_0)}]\,u(y).$$

Man könnte das oben gegebene Schema folgendermaßen verallgemeinern: man denke, daß im Laufe des unendlich kleinen Zeitintervalles $(t, t + dt)$ der Parameter y mit der Wahrscheinlichkeit $1 - a(t, y)\,dt$ unverändert bleibt und in $y', z < y' < z + dz$ mit der Wahrscheinlichkeit $u(t, y, z)\,dt\,dz$ übergeht. Dabei ist natürlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, y, z)\,dz = a(t, y) \tag{177}$$

vorausgesetzt. In diesem Falle dürfte man erwarten, daß für $g(t, y)$ die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, y) = -a(t, y)\,g(t, y) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, z)\,u(t, z, y)\,dz \tag{178}$$

gelten wird.

Wenn man nicht nur die Sprünge, sondern auch die stetige Änderung von y betrachten will, so ist es natürlich, für $g(t, y)$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, y) = -a(t, y)\,g(t, y) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, z)\,u(t, z, y)\,dz - \frac{\partial}{\partial y}[A(t, y)\,g(t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t, y)\,g(t, y)] \tag{179}$$

zu erwarten, wobei (177) vorausgesetzt ist und $A(t, y)$ und $B^2(t, y)$ die in § 13 erklärte Bedeutung haben.

Schlußbemerkung.

Wenn der Zustand des zu betrachtenden Systems durch n reelle Parameter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiert ist, hat man unter einigen Bedingungen, die denen in § 13 eingeführten analog sind, folgende Differentialgleichungen für die differentiale Verteilungsfunktion $f(s, x_1, x_2, \ldots, x_n, t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$(180)\quad \frac{\partial f}{\partial s} = -\sum_{i=1}^{n} A_i(s, x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(s, x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$(181)\quad \frac{\partial f}{\partial s} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}[A_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) f] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}[B_{ij}(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) f].$$

Für den Fall, in welchem $A_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ und $B_{ij}(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nur von t abhängen, wurden diese Gleichungen von Bachelier entdeckt und gelöst [14]). Die Lösungen, welche den Bedingungen unseres Problems genügen, sind in diesem Falle von der Form

$$(182)\quad f = Pe^{-\frac{\sum p_{ij}(y_i - x_i - q_i)(y_j - x_j - q_j)}{Q}}$$

wobei P, Q, p_{ij} und q_i nur von s und t abhängen.

Man könnte noch die gemischten Schemata betrachten, in welchen der Zustand des Systems durch Parameter definiert ist, unter welchen sowohl stetige als auch diskrete vorkommen.

---

[14]) Siehe [2]) II.

(Eingegangen am 26. 7. 1930.)